

**Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА
И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»**

Иванова М.Е., Казакова М.В.

**МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ
ЭКОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ОЦЕНКИ БИЗНЕС-
ЦИКЛОВ**

Москва 2014

Аннотация. Целью настоящей работы является анализ методологии эконометрической оценки бизнес-циклов для дальнейшего применения результатов этого анализа в оценке кредитных циклов в России и в ряде зарубежных стран. В первом разделе работы будут рассмотрены основные методы выделения тренда, которые используются в теории. Далее будут описаны методики построения трёх частотных фильтров: Бакстера - Кинга, Ходрика - Прескотта, Бевериджа - Нельсона. Эти фильтры рассматриваются для того, чтобы показать отличия в способах выделения компонент бизнес-цикла, а также методов выделения тренда.

Данная работа подготовлена на основе материалов научно-исследовательской работы, выполненной в соответствии с Государственным заданием РАНХиГС при Президенте Российской Федерации на 2013 год.

Содержание

Введение.....	4
1. Методы анализа тренда	5
1.1 Виды тренда.....	5
1.1.1 Виды трендов.....	5
1.1.2 Эмпирический пример	10
1.2 Анализ бизнес-циклов	15
2. Частотные фильтры	17
2.1 Частотный фильтр Бакстера-Кинга (Marianne Baxter and Robert G. King, 1995).....	17
2.2 Фильтр Ходрика - Прескотта	21
2.3 Фильтр Бевеиджа-Нельсона.....	23
Список использованной литературы.....	25

Введение

В данном исследовании будут определены основные виды трендов и рассмотрены известные методики выделения различных видов тренда: линейного, нелинейного, стохастического, детерминированного, а также модели со структурным и инновационным сдвигом. Далее нами будет дано определение бизнес – цикла, перечислены основные способы его выделения, а также рассмотрены различные виды трендов.

1. Методы анализа тренда

1.1 Виды тренда

Тренды и бизнес - циклы исследуются достаточно долго, начиная с XIX века. Рассмотрим известные методы выделения тренда.

1.1.1 Виды трендов

1. Стандартным подходом к моделированию временных рядов является их аддитивное разложение на тренд и циклическую компоненту, т.е. $Y_t = \mu_t + \varepsilon_t$, где

μ_t – тренд

ε_t – циклическая компонента ряда

$$E(\mu_t, \varepsilon_s) = 0 \forall t, s$$

Такой способ используется для анализа годовых данных, в него должен быть включён ряд квартальных данных или данных за месяц, которые могут содержать в себе сезонные колебания, что необходимо учитывать. Именно из-за сезонных колебаний мы можем выделить циклическую компоненту ряда.

Линейный тренд

Тренд и циклическая компонента ряда обычно являются ненаблюдаемыми величинами, то есть они не заданы и их надо оценивать отдельно, так же как и сделать обособленную проверку на значимость этих двух параметров (компонент).

Т.е. тренд будет выглядеть следующим образом: $\mu_t = a + bt$

Модель данных выглядит следующим образом: $Y_t = a + bt + \varepsilon_t$

,где ε_t отвечает за цикличность в модели данных.

Эта модель оценивается методом наименьших квадратов, с помощью которого и находятся эффективные оценки \tilde{a}, \tilde{b} . Далее оцениваем значимость эффективных оценок с помощью t статистики.

Такой способ выделения тренда является эффективным для малого количества наблюдений. Малость наблюдений зависит от того, насколько точные и адекватные выводы мы хотим получить в исследовании.

$$D(\varepsilon_t) = \sigma^2 \forall t,$$

$$\text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0$$

Нелинейный тренд

$$\mu_t = f(t)$$

В этом тренде проблемой является определение его функциональной формы, т.к. тренд должен быть сглаженной функцией от времени. Эта функция должна быть непрерывной во времени и непрерывной в первой разности. Предполагается, что знак функции не должен сильно меняться в первых разностях, не должно быть разрывов первого и второго рода, т.е. функция должна иметь гладкую форму.

(Если в точке k нарушено условие непрерывности и односторонние пределы конечны, то она называется точкой разрыва первого рода.)

Обычно в качестве нелинейного тренда рассматривается полином d -ой степени.

$$\mu_t = a + \sum_{j=1}^d \beta_j t^j$$

Чтобы функция имела гладкую форму, полином должен быть малых порядков ($d=1,2,3$)

Тренд с включением моделей индивидуальных циклов в единую модель.

Предполагается, что структурные сдвиги происходят в моменты времени

$$T_1, T_2, \dots, T_m; T_i \in [T_1; T_m]$$

и моделируются с помощью фиктивных переменных, т.е. модели рассматриваются структурные сдвиги, которые могут задаваться различным образом.

$$d_{it} = \begin{cases} 1 - \text{выполняется } i \text{ режим} \\ 0 - \text{в противном случае} \end{cases}$$

$$Y_t = a + \beta_1 t + \sum_{i=2}^m a_i d_{it} + \sum_{i=2}^m \sigma_i d_{it} t + \varepsilon_t$$

или

$$d_{it} = \begin{cases} t - T_{i-1}; t > T_{i-1} \\ 0 - \text{в_противном_случае} \end{cases}$$

$$Y_t = a + \beta_1 t + \sum_{i=2}^m a_i d_{it} + \sum_{i=2}^m \sigma_i d_{it} (t - T_{i-1}) + \varepsilon_t$$

Данные модели позволяют убрать условие о малом порядке полинома, которое рассматривалось в предыдущем пункте, и использовать полиномы высоких порядков ($d > 3$), а также комбинировать полиномы разных порядков.

Тренд с плавным переходом (инновационный сдвиг)

$$\mu_t = a_1 + \beta_1 t + (a_2 + \beta_2 t) S_t(\theta, \tau)$$

$$S_t(\theta, \tau) = (1 + \exp(-\theta(t - \tau T)))^{-1}$$

$S_t(\theta, \tau)$ выполняет контроль перехода между режимами.

За скорость перехода отвечает θ . Если θ маленькое, то $S_t(\theta, \tau)$ преодолевает переход между режимами, т.е. от 0 до 1 за большой промежуток времени.

Для больших значений θ , $S_t(\theta, \tau)$ преодолевает переход между режимами мгновенно в период τT , что соответствует моделям, которые рассматривались выше.

$$S_{-\infty}(\theta, \tau) = 0; S_{+\infty}(\theta, \tau) = 1; \theta > 0$$

$\theta < 0$ – начальный и конечный режимы являются обратными. Вся остальная интерпретация сохраняется.

Тренд с использованием метода скользящего среднего

$$\text{а) } \mu_t = \sum_{i=-n}^n a_i y_{t-i} \quad \begin{array}{l} a_i = 1/(2n+1) \\ i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n \end{array}$$

Оценка тренда доступна только для $t = n+1, \dots, T-n$, что означает потерю n наблюдений с конца и с начала. Данный способ используется для нечётного количества периодов: $2n+1$.

б) Для чётного количества периодов ($2n$), используются веса:

$$\begin{array}{ll} a_i = 1/2n & a_i = 1/4n \\ i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(n-1) & \text{И} \quad i = \pm n \end{array}$$

Таким образом, мы оцениваем линейный тренд с окном длиной $2n+1$.

с) Взвешенный метод скользящей средней более сложный и используется при предположении, что тренд – полином высокой степени.

Веса определяются из задачи минимизации суммы квадратов отклонений. Например, если полином 3 степени, это означает, что задача выглядит следующим образом:

$$\sum_{t=-n}^n \omega_t (y_t - a - \beta_1 t - \beta_2 t^2 - \beta_3 t^3)^2$$

При условии, что отклонения минимальны: $\sum_{t=-n}^n ((\omega_t - \omega_{t-1})^3)^2$. Обычно

n задаются как $\pm 4, \pm 6, \pm 12$.

Тренд–циклическая компонента ряда и компонента роста

В пункте 1 определено, что тренд (μ_t) отвечает за компоненту роста временного ряда, а ε_t - за циклические изменения. Такой тренд отвечает за долгосрочные изменения и циклическая компонента в нём не должна содержать в себе компоненты, отвечающие за долгосрочный период, т.е. предполагается стационарность ε_t , и если говорить об авторегрессии n -

го порядка, то корни характеристического уравнения должны быть по модулю меньше 1. $\varepsilon_t = \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \beta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \beta_n \varepsilon_{t-n} + E_t$

Условия стационарности:

1. Математическое ожидание конечно и не зависит от времени

2. Дисперсия конечна и не зависит от времени

3. Ковариация не зависит от времени, но зависит от глубины запаздывания.

Обычно, если рассматривать краткосрочные периоды, то на них легче выделить тренд, т.е. до всплесков и шоков, которые происходят в экономике и имеют долгосрочные последствия.

$$\tilde{\varepsilon}_t = y_t - \tilde{\mu}_t$$

Стохастический тренд

Преыдущие пункты описывают методы выделения тренда для стационарных временных рядов.

В данном разделе рассматриваются нестационарные ряды, т.е. ряды содержащие стохастичные тренды, т.е. с единичным корнем. Простейшие процессы называются случайным блужданием, а также случайным блужданием с дрейфом, если включается константа.

Случайное блуждание выглядит следующим образом:

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t + y_{t-2} + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} = y_0 + \sum_{i=0}^{t-1} \varepsilon_{t-i}$$

$$E(y_t) = E(y_0) \Rightarrow \text{положим } _ \text{ равным } _ 0$$

Характеристики процесса:

$$D(y_t) = \sum_{i=0}^{t-1} t \sigma_\varepsilon^2 \rightarrow \infty _ \text{ при } _ t \rightarrow \infty$$

Случайное блуждание с дрейфом можно представить следующим образом:

$$y_t = at + \sum_{i=0}^{t-1} \varepsilon_{t-i}, \text{ в данном уравнении нестационарность заложена в}$$

циклической компоненте. Т.е. $\varepsilon_t = \varepsilon_{t-1} + u_t$ содержит единичный корень.

$$E(y_t) = at$$

$$D(y_t) = t\sigma^2$$

$$\Delta^d (1 - a_1 L - a_2 L^2 - \dots - a_p L^p) y_t = a_0 + (1 - a_1 L - a_2 L^2 - \dots - a_q L^q) \varepsilon_t$$

$\Delta = (1 - L)$, если $d > 0$, это означает, что ряд не является стационарным.

К стационарному процессу, можно привести путём взятия d разностей (DS), или извлечением детерминированного тренда в случае, если ряд является стационарным около тренда. (TS), т.е. является стационарным в новой системе координат.

DS:

$$y_t = a + \beta * t + \varepsilon_t$$

$$- y_{t-1} = a + \beta * (t - 1) + \varepsilon_{t-1}$$

$$= \Delta y_t = \beta + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1} = \beta + L^1 \varepsilon_t$$

TS:

$$y_t = a + \beta * t + \varepsilon_t$$

$$E(y_t) = \infty$$

$$\text{Var}(y_t) = \sigma_\varepsilon^2$$

$$M_t = y_t - a - \beta * t = \varepsilon_t$$

$$E(M_t) = 0$$

$$\text{Var}(M_t) = \sigma_\varepsilon^2$$

1.1.2 Эмпирический пример

В этом разделе представлены результаты различных методологий выделения тренда для ряда безработицы.

Рассмотрим выделение тренда на примере ряда безработицы по месячным данным.

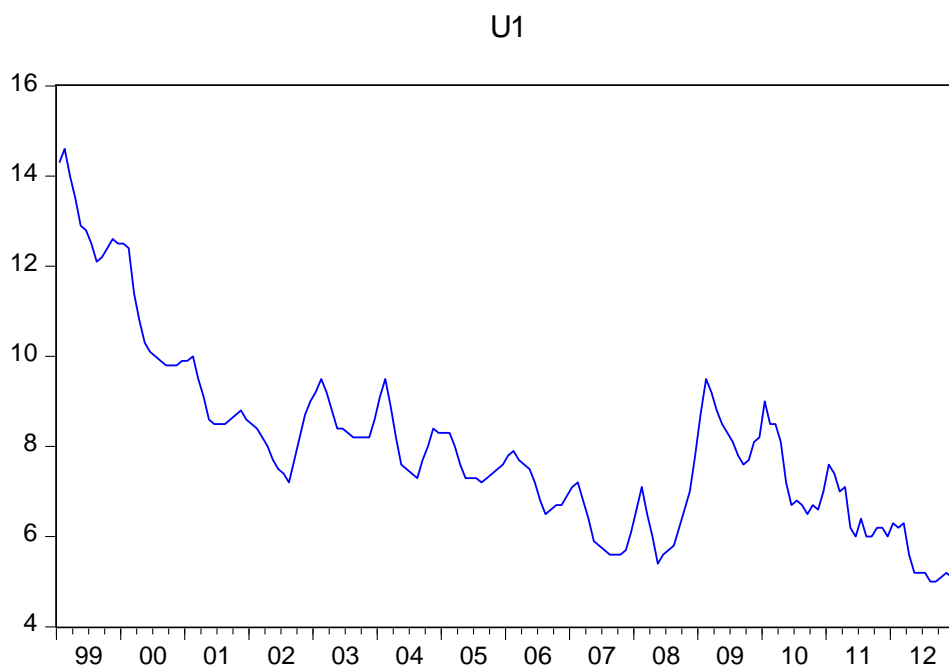
Анализ будем проводить по тому, как реальный ряд (actual) соотносится с подобранной моделью – fitted (на графике остатки ряда –

Residual), а также по анализу ошибки прогноза (Root mean squared error (RMSE)), т.е. будем выбирать модель с наименьшим значением ошибки.

Рассматриваемый период: январь 1999– январь 2013 гг.

Исходный ряд безработицы представлен на графике (см. рис.1):

Рисунок 1

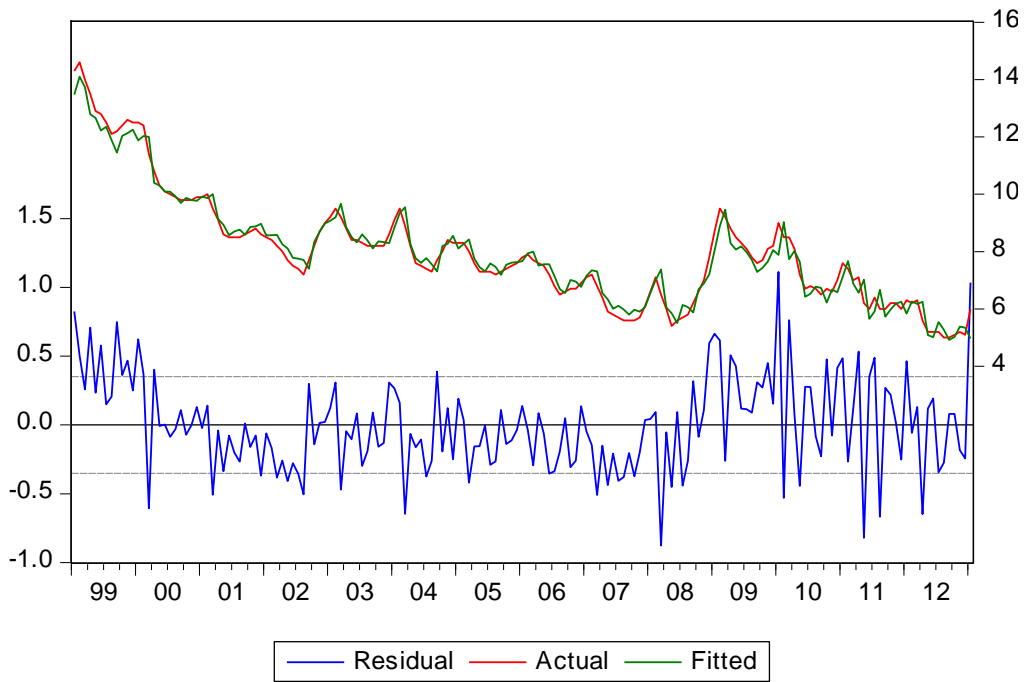


1. $Y_t = \mu_t + \varepsilon_t \quad \mu_t = a + bt$

$U1 = 10.462 + 0.029 * @TREND + MA(1), MA(2), MA(3)$

$RMSE=1.16$

Рисунок 2

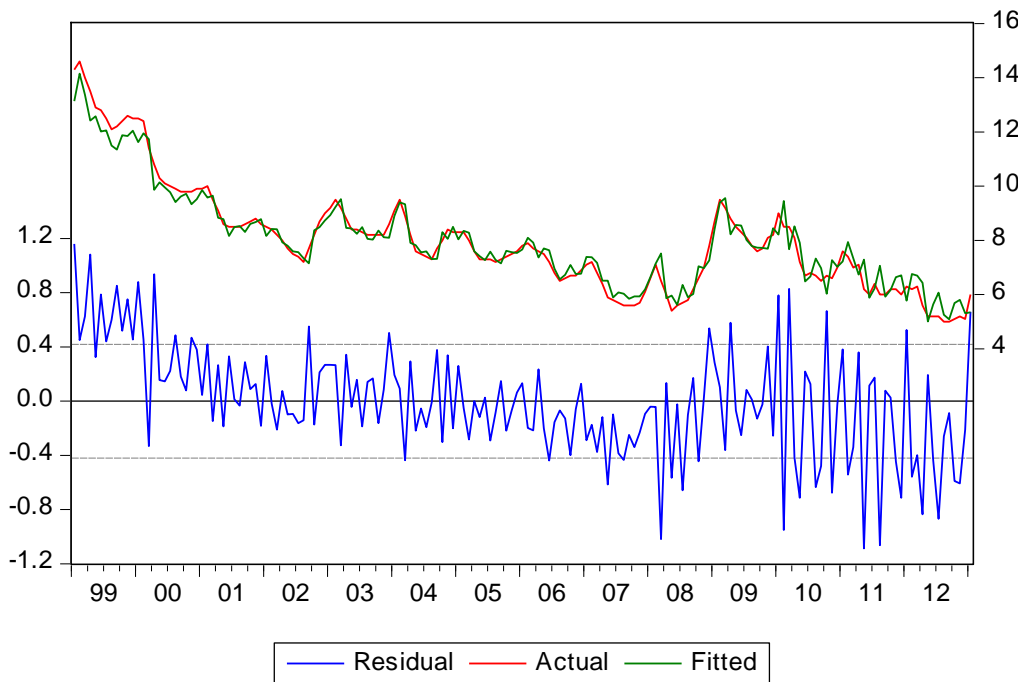


$$2. Y_t = \mu_t + \varepsilon_t \quad \mu_t = bt$$

$$U1 = 7.946 + MA(1), MA(2), MA(3)$$

$$RMSE=1.86$$

Рисунок 3



$$3. d_{it} = \begin{cases} 1 - \text{выполняется } i \text{ режим} \\ 0 - \text{в противном случае} \end{cases}$$

$$Y_t = a + \beta_1 t + \sum_{i=2}^m a_i d_{it} + \varepsilon_t$$

$$U1 = 0.329*D1_U - 0.558*D2_U - 0.185*D3_U - 0.638*D4_U - 0.038*@TREND + 12.065 + MA(1), MA(2), MA(3)$$

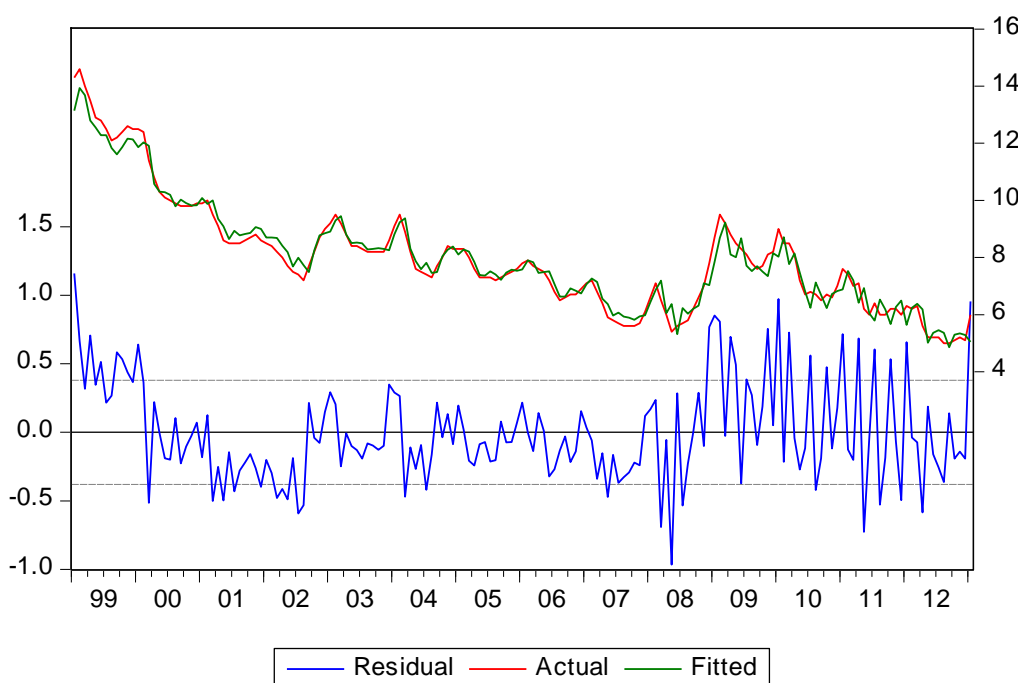
RMSE=1.002

D1=1 (1999M01;2002M06)

D2=1 (1999M01;2008M05)

D3=1 (1999M01;2003M06)

D4=1 (1999M01;2009M06)



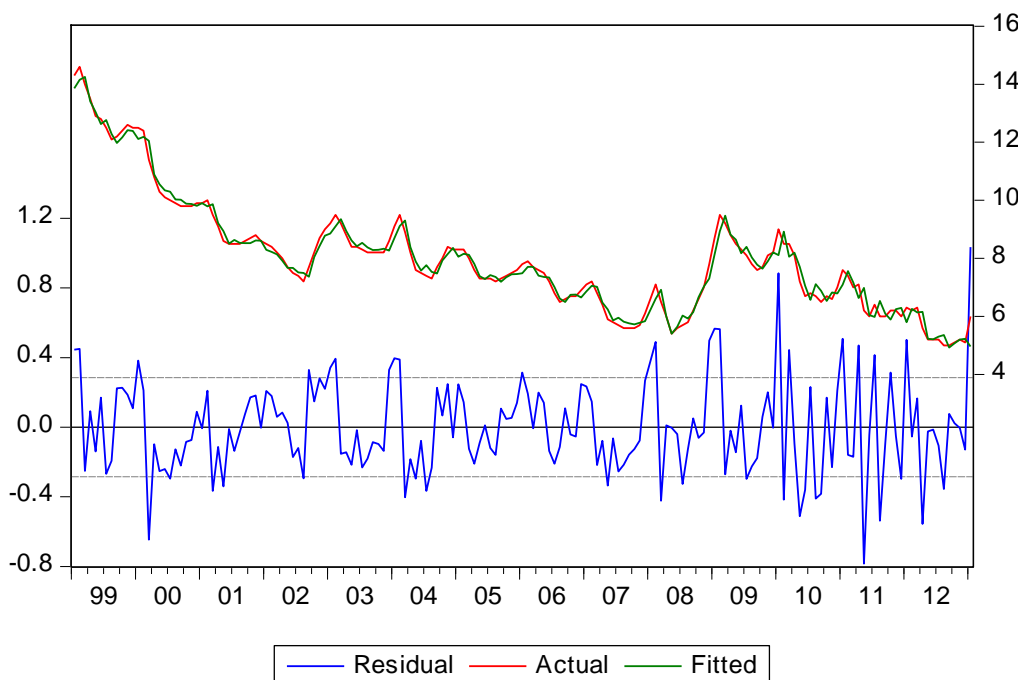
$$4. Y_t = a + \beta_1 t + \sum_{i=2}^m a_i d_{it} + \sum_{i=2}^m \sigma_i d_{it} b_i + \varepsilon_t$$

$$d_{it} = \begin{cases} 1 - \text{выполняется } i \text{ режим} \\ 0 - \text{в противном случае} \end{cases}$$

$$U1 = 10.502*D1_U + 35.069*D2_U - 8.476*D3_U - 41.765*D4_U - 0.078*@TREND + 18.249 - 0.262*D1_U*@TREND - 0.31*D2_U*@TREND + 0.16*D3_U*@TREND + 0.337*D4_U*@TREND + MA(1)+MA(2)+MA(3)$$

RMSE=0.506

Рисунок 5



$$5. Y_t = a + \beta_1 t + \sum_{i=2}^m a_i d_{it} + \sum_{i=2}^m \sigma_i d_{it} Y_t + \varepsilon_t$$

$$d_{it} = \begin{cases} 1 - \text{выполняется } i \text{ режим} \\ 0 - \text{в противном случае} \end{cases}$$

$$U1 = 1.981 * D1_U + 2.397 * D2_U - 4.603 * D3_U - 8.217 * D4_U - 0.0303 * @TREND + 11.199 - 0.291 * D1_U * U1 - 0.440 * D2_U * U1 + 0.4923 * D3_U * U1 + 1.0396 * D4_U * U1 + MA(1), MA(2), MA(3)$$

$$D1=1 (1999M01;2002M06)$$

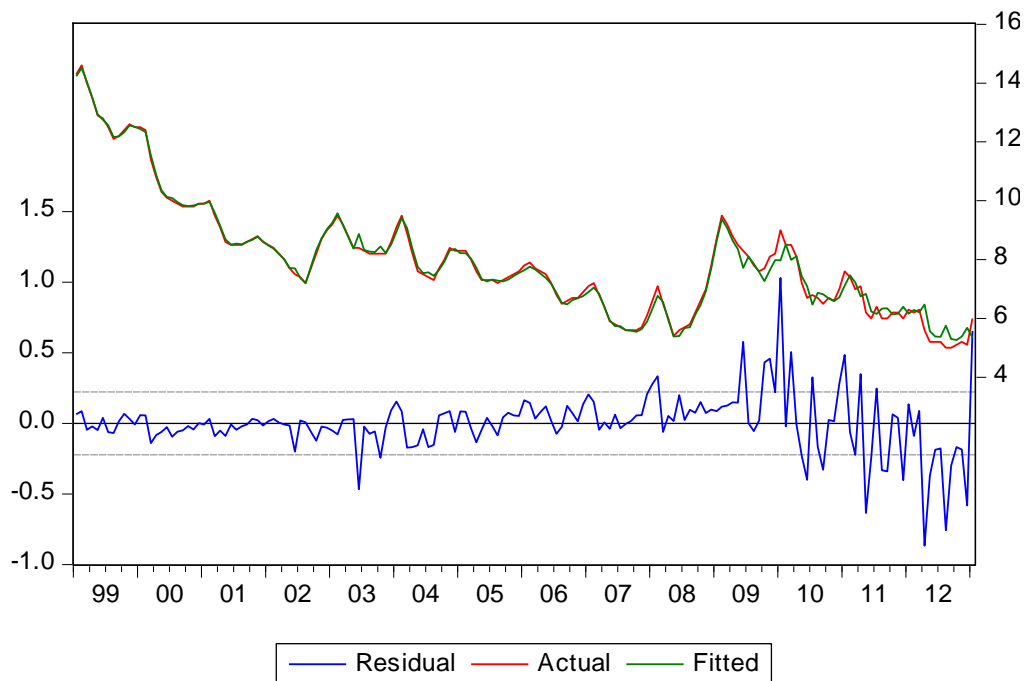
$$D2=1 (1999M01;2008M05)$$

$$D3=1 (1999M01;2003M06)$$

$$D4=1 (1999M01;2009M06)$$

$$RMSE=0.439$$

Рисунок 6



Из представленных выше моделей наиболее точной является последняя:

включение фиктивных переменных для отображения структурных сдвигов, а также ввод фиктивных переменных на наклон.

Такой вывод можно сделать с помощью графического анализа по рисунку 6. График реальных данных наиболее точно совпадает с подобранной моделью, а также последняя модель обладает наименьшей ошибкой прогноза, равной 0.439.

1.2 Анализ бизнес-циклов

Бизнес-цикл (Burns and Mitchell, 1946) – это цикл, во время которого происходит подъём экономической активности одновременно по многим направлениям, а затем наступает обширный спад, сжатие рынка и последующее оживление, переходящее в фазу подъёма нового цикла.

Такая последовательность изменений повторяется неизбежно, но не периодически.

Продолжительность бизнес - циклов варьируется от года до десяти – двенадцати лет. Это неделимые периоды, которые не поддаются разбивке на более короткие циклы аналогичного характера с равной им по величине амплитудой.¹

Методы выделения бизнес циклов

Наиболее распространённым способом выделения фаз цикла является использование частотных фильтров. Далее в работе будут рассмотрены три вида фильтров: Бакстера-Кинга, Ходрика-Прескотта, Бевериджа-Нельсона.

¹ Arthur F. Burns & Wesley C. Mitchell, 1946. "Plan of Treating Secular, Seasonal and Random Movements," NBER Chapters, in: Measuring Business Cycles, pages 37-55 National Bureau of Economic Research, Inc.

2. Частотные фильтры

В первом разделе было сказано, что для выделения компонент бизнес-цикла используются частотные фильтры. Во втором разделе будет продемонстрирована методология построения трёх видов частотных фильтров: Бакстера-Кинга, Ходрика-Прескотта, Бевериджа-Нельсона. Фильтр Ходрика-Прескотта будет использован в работе в одном из способов для построения и анализа NAIRU. В дальнейшем рассматривается по порядку три вида частотных фильтров.

2.1 Частотный фильтр Бакстера-Кинга (Marianne Baxter and Robert G. King, 1995).

Бакстер и Кинг выделяют 6 пунктов, которым должен соответствовать фильтр:²

1. Выводить циклическую компоненту в заданном диапазоне периодичностей, не искажая характеристик компоненты;
2. Отсутствие фазового сдвига (т.е. фильтр не должен изменять временные метки поворотных точек (min,max) в анализируемом ряде;
3. Наличие идеальной аппроксимации к идеальному фильтру (бесконечный диапазон заменён на конечный интервал);
4. Коэффициент фильтра при нулевой частоте должен равняться нулю. Колебания бизнес-циклов стремятся к нулю. Это говорит о том, что полосовой фильтр предполагает более гибкий метод исключённого тренда и устраняет высокочастотные колебания в динамическом ряду ВВП с исключённым трендом;

² Ulrich Woitek, «A Note on the Baxter-King Filter» Department of Economics, University of Glasgow, June 1998

5. Выдавать компоненты экономического цикла независимо от длительности периода наблюдения;
6. Осуществление практического метода.

Методология построения: Бизнес-цикл

На основании 6-ти требований был построен фильтр конечного порядка k .

Метод полосовой фильтрации позволяет разделить временной ряд на составляющие: тренд, цикл и случайные отклонения.

Бизнес циклы имеют свою амплитуду и частоту, следовательно, фильтры в своей основе тоже имеют эти характеристики, которые отражают его пропускную способность на высоких и на низких частотах, и в задачу фильтра входит убрать ненужные колебания (шумы), чтобы можно было разделить ряд на фазы бизнес - циклов.

Принято считать, что длина цикла находится в интервале между 6 и 32 кварталами, т.е. между 18 месяцами и 8 годами.

Т.е. фильтр Бакстера-Кинга проходит через компоненты временного ряда с периодическими колебаниями от 6 до 32 кварталов и удаляет компоненты на высоких и низких частотах, сохраняя при этом компоненты на определённом интервале частот, т.е. происходит сглаживание временного ряда.

Построение

Основой фильтра является преобразование Фурье.

Каждой функции от времени ставится функция от частоты.

1. Ряд от времени переводится в ряд от частоты

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi i t \omega} dt = F(g(t)) \quad , (\omega)\text{- частота колебаний}$$

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)e^{2\pi i \omega t} dt, i = \sqrt{-1}$$

– обратное преобразование Фурье.

Для такого преобразования достаточными условиями являются: абсолютная интегрируемость и конечность ряда.

2. Преобразование Фурье предполагает использование ряда, где время находится в промежутке от минус бесконечности до плюс бесконечности, что не выполнимо для практических задач, а потому промежуток времени обрезается до конечного.

3. Происходит обратный переход от частоты к времени.

4. Данные отфильтрованы на определённом интервале частот.

Преобразование Фурье используемое в фильтре Бакстера - Кинга

Во временной шкале для извлечения тренда используется метод скользящего среднего:

$$Y_t^* = \sum_{-k}^k a_k y_{t-k} \quad \sum_{-k}^k a_k = 0$$

что эквивалентно частотной шкале:

$$Y_t = \int_{-\pi}^{\pi} \xi(w) dw, \quad \xi(w) - \text{случайные периодические компоненты.}$$

Отфильтрованный ряд можно представить следующим образом:

$$Y_t^* = \int_{-\pi}^{\pi} a(w) \xi(w) dw, \quad a(w) = \sum_{-k}^k a_h e^{-iwh} \quad a(w) - \text{частотная функция линейного фильтра}$$

На это преобразование накладываются определённые условия:

$$a(0) = 0 \quad E(\xi(w_1) \xi^T(w_2)) = 0 \quad \text{var}(y_t^*) = \int_{-\pi}^{\pi} |a(w)|^2 f_y(w) dw, \quad f_y(w) = \text{var}(\xi(w))$$

Задача фильтра – использовать частотную шкалу и предпосылки, так чтобы смоделировать метод скользящего среднего для определённых частот.

Фильтр Бакстера-Кинга совмещает 2 фильтра: низкочастотный и высокочастотный фильтры.

Низкочастотный и высокочастотный фильтры дают идеальный коэффициент:

$$\beta(w) = \begin{cases} 1, & |w| \leq \frac{w}{2} \\ 0, & |w| > \frac{w}{2} \end{cases}$$

Задача: приблизиться к идеальному коэффициенту: т.е. минимизировать отклонения от идеального коэффициента.

$$\min Q_{aj} = \int_{-\pi}^{\pi} |\beta(\omega) - a(\omega)|^2 d\omega \quad - \text{ несоответствие аппроксимированного}$$

коэффициента от идеального коэффициента.

Составляется функция Лагранжа при условии $a(0) = \phi$

$$L = -Q + \lambda(a(0) - \phi)$$

Решение задачи выглядит следующим образом:

$$a_j = b_j + Q \quad j = 0, \pm 1, \dots, \pm K$$

$$b_j = \begin{cases} \frac{w_2 - w_1}{\Pi} & \text{если } j = 0 \\ \frac{1}{\Pi j} (\sin w_2 j - \sin w_1 j) & \text{если } j = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

$$Q = \frac{-\sum_{j=-K}^K b_j}{2K+1}$$

Бакстер-Кинг предлагают для расчета кварталных данных использовать:

$$K=12 \quad \omega_1 = 2\pi * \frac{1}{32} \quad \omega_2 = 2\pi * \frac{1}{6}$$

Для годовых данных:

$$K=3 \quad \omega_1 = 2\pi * \frac{1}{8} \quad \omega_2 = \pi$$

Из всего вышесказанного можно перечислить некоторые свойства данного фильтра:

- Фильтр Бакстера-Кинга – аппроксимация идеального фильтра, который строится по бесконечному ряду Фурье, но так как мы пренебрегаем этим условием из-за невозможности создать бесконечный временной ряд, то возможны появления лишних максимумом.

- Временной ряд представим в виде случайного блуждания

$$(1-L)y_t = u_t$$

$$u_t = N(0, \sigma^2)$$

Фильтр создаёт ложные циклические структуры в диапазоне частот экономического цикла. Спектр случайного блуждания задаётся как:

$$f(\omega) = |a^{I(1)}(\omega)|^2 \frac{\sigma^2}{2\pi}, \omega \in [-\pi; \pi]$$

$$|a^{I(1)}(\omega)|^2 = \left(2 \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) \sum_{j=1}^k a_j \sum_{h=-(j-1)}^{j-1} (j-|h|) \cos(\omega h) \right)^2$$

- Необходимы неотфильтрованные данные ряда Y_t за 3 года вперёд и 3 года назад от t .
- Возникает неопределённость в выборе длины коридора и весов усреднения: K большие – большие отсечения в данных, K маленькие – ложные скачки и колебания.
- Принцип действия основан на методе скользящего среднего.

2.2 Фильтр Ходрика - Прескотта

Методология

$$Y_t = c_t + g_t$$

ряд Y_t – сумма двух компонент: роста (g_t) и цикла (c_t)

Задача

$$\min_{g_t} \left\{ \sum_{t=1}^T c_t^2 + \lambda [(g_t - g_{t-1}) - (g_{t-1} - g_{t-2})]^2 \right\}$$

λ – параметр сглаживания, убирающий излишнюю изменчивость компоненты роста

$$[(g_t - g_{t-1}) - (g_{t-1} - g_{t-2})]^2 \text{ – изменение тренда.}$$

$$y_t^c = \left(\frac{\lambda(1-L)^2(1-L^{-1})^2}{1 + \lambda(1-L)^2(1-L^{-1})^2} \right) y_t \quad (1) \quad \text{или} \quad y_t^c = a(L)y_t$$

$$a_0 = 1 - 1/2K + 1,$$

$$a_j = a_{-j} = 1/2K + 1, j = 1, 2, \dots, K$$

$$\sum a_k = 0$$

Из уравнения (1) следует, что фильтр Ходрика-Прескотта убирает единичный корень (т.е. нестационарность) из компонент временного ряда.

$$y_t^g = \frac{1}{2K + 1} \sum_{j=-K}^K y_{t-j}$$

$$\lambda = \sigma_c^2 / \sigma_g^2$$

Для квартальных данных Ходрик-Прескотт предлагают использовать $\lambda=1600$. Авторы предполагают, что изменению циклической компоненты на 5% соответствует квартальное изменение темпов роста ВВП на 1/8%. $\sqrt{\lambda} = 5/(1/8)$, следовательно $\lambda=1600$. Важно отметить, что все оценки строились в логарифмах, т.е. изменение тренда $[(g_t - g_{t-1}) - (g_{t-1} - g_{t-2})]^2$

что соответствует изменению темпов роста ВВП.

Для годовых данных: 400. Т.е. параметр λ задаётся экспертно³, и нет чётких методологий выбора значений этого параметра.

Параметр λ отвечает за степень гладкости временного ряда, чем больше значение λ , тем более гладким получается временной ряд.

Значение λ зависит от предположения о степени различия изменения квартальной и циклической составляющей. В работе Ходрика-Прескотта λ находилась в интервале от 400 до бесконечности.

³ Robert J. Hodrick; Edward C. Prescott; «Postwar U.S. Business Cycles: An Empirical Investigation» Journal of Money, Credit and Banking, Vol. 29, No. 1. (Feb., 1997), pp. 1-16.

Из всего вышесказанного можно выделить несколько свойств этого фильтра:

- Если $\lambda = 0$, то $y_t = g_t$
- Если $\lambda \rightarrow \infty$ то g_t – линейный тренд

Возникает проблема потери наблюдений за последние периоды времени. Для решения этой проблемы используют прогнозные значения. Однако на конце выборки у нас меньше информации о длительности влияния шоков в экономике, следовательно, нельзя быть уверенным в полученных результатах, т.е. в правильности разложения на тренд и циклическую компоненту ряда. Это означает, что недооценивается циклическая составляющая ряда. Возникает проблема о периоде прогнозных значений, которые нужно добавить во временной ряд. Авторы предлагают строить прогнозы на 4 года вперёд, закладывая в основу среднесрочные прогнозы по всем данным или по последней информации.

Все данные в логарифмах, т.е. $g_t - g_{t-1}$ – *темпы роста*.

2.3 Фильтр Бевеиджа-Нельсона

Требование к временному ряду

1. Ряд должен быть интегрированным рядом первого порядка, т.е. содержать в себе один единичный корень, что означает нестационарность процесса.

Процесс называется стационарным, при выполнении следующих свойств:

- 1) Математическое ожидание конечно и не зависит от времени;
- 2) Дисперсия конечна и не зависит от времени;
- 3) Ковариация не зависит от времени, но может зависеть от глубины запаздывания.

Нестационарный процесс представим в виде:

$$\Delta^d (1 - a_1 L - \dots - a_p L^p) y_t = a_0 + (1 + b_1 L + \dots + b_q L^q) \varepsilon_t$$

$$\Delta = 1 - L$$

Если $d > 0$ – ряд y является нестационарным.

Т.е. в нашем случае условие для использования фильтра: $d=1$

Данный фильтр используется для долгосрочного прогнозирования.

Методология построения

Тренд (Т) выглядит следующим образом:

$$T_t = y_t + \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} E_t [(\Delta Y_{t+j} - \mu)] \quad \mu = E[\Delta Y_t] \Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$$

$C_t = Y_t - T_t$, Т.е. бизнес цикл – отклонение ряда от тренда.

$$\Delta Y_t - \mu = [h_1 h_2 \dots h_k] X_t$$

$$X_t = F X_{t-1} + v_t, |F| < 1 - \text{стационарность}$$

$$T_t = y_t + [h_1 h_2 \dots h_k] F (I - F)^{-1} X_{t|t} \quad X_{t|t} = E_t [X_t]$$

$$C_t = -[h_1 h_2 \dots h_k] F (I - F)^{-1} X_{t|t}$$

Список использованной литературы

1. Terence C. Mills (2003) "Modelling Trends and cycles in economic time series"
2. Phillips, A. W. (1958). "The Relationship between Unemployment and the Rate of Change of Money Wages in the United Kingdom 1861-1957". *Economica* 25 (100): 283–299.
3. Ulrich Woiteky «A Note on the Baxter-King Filter», Department of Economics, University of Glasgow, June 1998
4. Robert J. Hodrick; Edward C. Prescott «Postwar U.S. Business Cycles: An Empirical Investigation» *Journal of Money, Credit and Banking*, Vol. 29, No. 1. (Feb., 1997), pp. 1-16.
5. James C. Morley. «A state–space approach to calculating the Beveridge–Nelson decomposition.» Department of Economics, Washington University, Campus Box 1208, 1 27 February 2001
6. Laurence Ball & N. Gregory Mankiw, 2002. "The NAIRU in Theory and Practice," NBER Working Papers 8940, National Bureau of Economic Research, Inc.
7. Schreiber S., Wolters J. (2002). "What's Wrong with the (German) NAIRU?" Discussion Paper 8, Freie Universitat Berlin, Institute for Statistics and Econometrics, Berlin, Germany
8. H. Stock, and Mark W. Watson «The NAIRU, Unemployment and Monetary Policy Douglas Staiger», *Journal of Economic Perspectives—Volume 11, Number 1—Winter 1997—Pages 33–49*
9. Arthur F. Burns & Wesley C. Mitchell, 1946. "Plan of Treating Secular, Seasonal and Random Movements," NBER Chapters, in: *Measuring Business Cycles*, pages 37-55 National Bureau of Economic Research, Inc.
10. Гафаров Б.Н. «Кривая Филлипса и становление рынка труда в России.» *Экономический журнал ВШЭ* 2009-2010 гг. стр. 155-176