Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»

М.В. Казакова

Анализ зарубежного опыта в области декомпозиции экономического роста на основе оценки производственных функций

Москва 2013

Аннотация. Производственная функция является одним из основных понятий экономической теории. Как основа для моделирования поведения предприятий производственные функции используются в довольно широком круге экономических задач, где в явном или неявном виде требуется установления соответствия между затратами и выпуском. Так, одной из целей при построении первой эмпирической производственной функции Кобба-Дугласа в 1928 г. был анализ соотношения предельного продукта и вознаграждения труда. С середины 20 века производственные функции широко используются в задачах изучения экономического роста, оценки технического прогресса. В данном исследовании проводится обзор теоретических и эмпирических работ в области декомпозиции экономического роста на основе производственных функций. Проводится сопоставление микро- и макропроизводственных функций. Рассматриваются предпосылки существования макропроизводственной функции и взаимосвязь между параметрами микро- и макропроизводственной функции.
Автор выражает благодарность Фокиной Т.В. за предоставленные материалы и ценные комментарии.

Данная работа подготовлена на основе материалов исследования, выполненного в соответствии с тематическим планом фундаментальной и прикладной научно-исследовательской работы РАНХиГС при Президенте Российской Федерации на 2011 год.

Содержание

Введение[1]

За последние полтора десятка лет теория экономического роста стала исключительно активной областью как эмпирических, так и теоретических исследований, что сопровождалось появлением множества публикаций в западной литературе, посвященных этой теме. Можно выделить три взаимосвязанных, но идейно разных течения: общемировой рост, страновой рост и различие в уровнях доходов (*dispersion in income levels*) разных стран.

Основой этих моделей роста является агрегированная производственная функция – соотношение, которое призвано описать технологические соотношения на агрегированном уровне. Основная проблема состоит в теоретическом обосновании существования такой макро-функции. При переходе с микро- на макро- уровень такая функция должна получаться как композиция микро- производственных функций, однако, существует достаточное количество публикаций, начиная с 1940-ых годов, в которых указывается, что такое агрегирование микро- функций в макро-производственную функцию достаточно проблематично.

Производственная функция как зависимость между количеством используемых экономических ресурсов и максимально возможным объемом выпуска при существующей технологии производства представляет собой некое техническое ограничение, определяющее поведение принимающей решения фирмы.

Строго говоря, концепция производственной функции относится к области микроэкономики. Однако по аналогии с микропроизводственными функциями строятся соотношения между агрегированными показателями выпуска и затрат, т.е. макропроизводственные функции (см., к примеру (Бессонов, 2002)). В то же время, как отмечает Аллен (Ален, 1963), правомерность такого перехода требует специального обоснования. Существование макроэкономической производственной функции именно как технического ограничения, с которым имеет дело вся экономика, возможно лишь при выполнении ряда жестких предпосылок.

С точки зрения экономистов-практиков, оценки производственных функций выполняются для следующих целей:

[1] Автор выражает благодарность Р.М.Энтову, С.Г.Синельникову-Мурылеву, С.М.Дробышевскому, О.В.Луговому, М.Ю.Турунцевой и Е.В.Астафьевой за ценные комментарии и замечания, высказанные в ходе обсуждения данной работы на различных этапах ее подготовки.

- чтобы получить меру эластичности замещения между факторами и эластичности спроса на факторы по цене. Такие измерения используются для предсказания воздействия технологических изменений или изменений предложения факторов на распределение национального дохода.
- чтобы распределить общий рост на накопление факторов производства и технический прогресс между двумя периодами
- чтобы численно проверить теории и их предсказания.

В своем обзоре современного состояния теории роста Джонатан Темпл (*Jonathan Temple*) писал: "… агрегированная производственная функция – это наименее удовлетворительный элемент макроэкономики, хотя кажется, что многие экономисты рассматривают этот неуклюжий инструмент как необходимый для понимания уровней национального дохода и темпов роста…."

Условия, при которых возможно агрегирование микро- производственных функций являются достаточно жесткими, и трудно себе представить, что все эти ограничения могут быть реализованы в какой-либо реальной экономике. Примером таких ограничений могут являться теоремы Леонтьева, Натафа (*Nataf*) и Громана (*Groman*). Далее мы рассмотрим более подробно модель агрегирования Утакера-Сато (*Houthakker-Sato*) и те условия, которые налагаются на производственную функцию.

Почему же экономисты используют агрегированные производственные функции, несмотря на опубликованные результаты. Можно выделить следующие причины:

- одна из них, основанная на методологической позиции, известной как инструментализм, состоит в том, что агрегированная производственная функция строится по аналогии с микро- производственной функцией и их обоснование чисто эмпирический вопрос. Более того, если агрегированная производственная функция позволяет получать разумные эмпирические результаты, то, почему бы ей не пользоваться;
- вторая (согласно Самуэльсону, 1961-62): агрегированные производственные функции рассматриваются как иносказание;
- наконец, при проведении эмпирических исследований, где используется агрегированная производственная функция, например, growth accounting или эконометрическое оценивание, другого выбора нет.

Далее рассмотрим вопрос о том, как можно трактовать понятие агрегированной производственной функции. Агрегированная производственная функция – это функция, которая отображает агрегированные затраты на агрегированный выпуск. Такая концепция была присуща макроэкономическому анализу со времен классических экономистов, хотя в ту пору и не была строго оформлена математически. Однако, это понятие сегодня сопряжено с концептуальными трудностями, особенно в области связей микро- и макро- теорий. Одним из первых экономистов, который предложил систематическую трактовку проблемы агрегирования производственных функций был Клейн (*Klein*). Он предполагал, что агрегированная производственная функция должна быть строго техническим соотношением, сродни микро- производственной функцией, но без использования полной микромодели с предположением максимизации прибыли производителем в выведении агрегированной производственной функции макромодели. Клейн показал, что существуют определенные соотношения в микроэкономике, которые не зависят от условий равновесия, и мы можем ожидать, что соответствующие уравнения макроэкономики также будут независимыми от условий равновесия. Основные уравнения, которые имеют это свойство независимости в микроэкономике – это технологические производственные функции. Агрегированная производственная функция не должна зависеть от максимизации прибыли, но только от технологических факторов.

Напротив, Мэй (*May*) доказал, что даже производственная функция единственной фирмы не является чисто технологическим соотношением, а является результатом осознанного принятия решений (*decision-making*). Таким образом, макро- производственная функция – это воображаемая сущность, в том смысле, что нет кого-либо, принимающего решения на макро- уровне, который бы оптимально распределял ресурсы. Макро функция строится из микро-“кирпичиков”, которые предполагаются ведущими себя рационально. Некоторое время спустя Фишер (*Fisher*) снова рассмотрел этот вопрос, и выяснил, что на любом уровне агрегирования производственная функция не является описанием соотношения между уровнями затрат и выпуска. Скорее производственная функция описывает максимальный уровень выпуска, который может быть достигнут, если затраты были использованы эффективно.

Сегодня это общепринятая точка зрения, и таким образом, существует разница между инженерной производственной функцией и экономической производственной функцией (даже на микроэкономическом уровне). Первая – это чисто технологическое соотношение, выраженное в физических терминах, в то время как вторая предусматривает рассмотрение эффективности.

1. Соотношение между микро- и макропроизводственными функциями

1.1 Условия агрегирования Утакера-Сато (Houthakker-Sato)

Подход Сато к агрегированию основан на процедуре Утакера. Утакер предложил оригинальный путь к решению проблемы агрегирования, постулировав, что доли факторов распределены среди фирм, по которым происходит агрегирование. Затем он показал для случая одной переменной выпуска, двух – затрат, что если отдельная производственная функция имеет постоянные коэффициенты (не обязательно одинаковые для всех фирм), и отношения затраты-выпуск распределены по Парето $Y = C\left(\frac{L}{Y}\right)^{\alpha_1 - 1}\left(\frac{K}{Y}\right)^{\alpha_2 - 1}$, где $\alpha_1 > 1$ и $\alpha_2 > 1$, тогда агрегированная производственная функция – это функция Кобба-Дугласа с уменьшающейся отдачей от масштаба $Y = AL^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2 + 1}}K^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2 + 1}}$. Особенностью модели Утакера является то, что если все отдельные фирмы действуют согласно леонтьевской технологии, и если имеет место Парето-распределение (см. выше), тогда агрегированная производственная функция имеет вид функции Кобба-Дугласа. Другими словами, в то время как агрегированная производственная функция имеет вид технологии с единичной эластичностью замещения, а на микро- уровне не существует возможности взаимной замены факторов производства.. Эта процедура общеизвестна как подход эффективность-распределение (*efficiency-distribution approach*). Отметим, что функция вида Кобба-Дугласа получается и при других предположениях относительно действий микро- агентов, например при шумпетеровском подходе к описанию теории роста (см. далее)

Сато развил и расширил процедуру Утакера, исследовав как поведение на микро- уровне (*micro behavior*) производства соотносится с макро поведением через распределение коэффициентов затрат. Он позволил эластичности замещения превышать ноль и распределение функции не обязательно должно подчиняться Парето. Этот подход к проблеме агрегирования показывает, что агрегированная производственная функция может быть получена, в случае, когда распределение капитала по фирмам с родственными технологиями фиксирована или изменяется в ограниченных пределах. Подход Сато состоит в разбиении проблемы агрегирования на два последовательных вопроса. Сначала предположим, что имеется производственная функция $Y = Y(K_1,..., K_n, L)$, и проанализируем возможность её представления в следующем виде $Y = F(K, L)$, путем агрегирования вектора капитала ***K***. На этом шаге необходимо найти капитальный агрегат ***K*** и макрофункцию *F*. Сато назвал этот проблемой существования. Эта процедура должна быть повторена для каждого типа распределения, таким образом, получим ряд из *F*. Второй шаг – выяснить условия, при которых указанные распределения будут генерировать одну и ту же *F*. Это – проблема инвариантности. И как следствие Сато задавался вопросом, могут ли два разных распределения дать производственные функции, одинаковые в каждом аспекте. Он показал, что если распределение стабильно, то результирующие оценки должны отражать агрегированную производственную функцию. Таким образом, ключевым в этом подходе является стабильность функции распределения.

1.2 Предпосылки существования макропроизводственной функции

Как показал Саржент (Sargent, 1987), индивидуальные решения производителей относительно объема выпуска могут складываться в единый макропроцесс производства при выполнении следующих предпосылок:

- все предприятия в экономике обладают одинаковой производственной функцией, однородной в первой степени;
- каждое предприятие максимизирует прибыль и работает в условиях совершенной конкуренции, как на рынке факторов производства, так и на рынке сбыта своей продукции;

Можно показать, что при выполнении данных предпосылок существует макроэкономическая производственная функция, имеющая ту же функциональную форму и те же параметры, что и производственная функция отдельных предприятий в экономике. При этом все предприятия в экономике будут обладать одинаковым показателем капиталовооруженности. Формальное доказательство данных утверждений приводится в Приложении.

Заметим, что применительно ко всей экономике названные предпосылки существования макрофункции являются достаточно жесткими. Так, в диверсифицированной экономике предприятия различных отраслей могут использовать различные технологии производства, которые нельзя описать одинаковой производственной функцией. Кроме того, существуют отрасли, в которых в силу особенностей технологии производства совершенная конкуренция является нецелесообразной с экономической точки зрения. Поэтому данная модель подходит больше для описания взаимосвязи между агрегированными показателями для относительно однородных отраслей промышленности. Применение модели для построения производственной функции всей экономики требует дополнительного исследования соответствия ее предпосылок экономической реальности.

1.3 Связь между коэффициентами макро- и микропроизводственной функций

Следующий важный вопрос состоит в следующем: что представляет собой соотношение между агрегированными показателями факторов и выпуска, если не выполняются перечисленные выше предпосылки. Другими словами, какую интерпретацию имеют в таком случае параметры макропроизводственной функции и как они соотносятся с параметрами микрофункций.

Предположим, что производственные процессы всех предприятий в экономике могут быть описаны функцией Кобба-Дугласа.

Сначала рассмотрим простейший случай однофакторной производственной функции. Можно показать, что в таком случае параметры макропроизводственной функции являются средневзвешенные из соответствующих микропараметров.

Предположим, как и раньше, что в стране действуют N фирм, каждая из которой характеризуется производственной функцией следующего вида:

$$y_i = x_i^{\alpha_i}, \quad i = 1 \ldots N, \tag{1}$$

где α_i – параметры, в общем случае разные для всех фирм.

Мы предполагаем, что существует макроэкономическая производственная функция, связывающая между собой агрегированный выпуск и агрегированные затраты факторов:

$$y = x_1^{\alpha},$$

(1')

где $y = \sum_i y_i$, $x = \sum_i x_i$.

Вопрос состоит в том, как соотносятся между собой микропараметры α_i и макропараметр α.

Предположим, мы располагаем данными об объеме выпуска и затрат каждой фирмы за некоторый период времени ($t = 1...T$). Для рассматриваемого периода времени рассмотрим два вида зависимостей: между объемом выпуска отдельной фирмы и совокупным объемом выпуска, а также между объемом затрат фактора отдельной фирмы и факторными затратами во всей экономике. Для этого оценим методом наименьших квадратов регрессионные уравнения следующего вида:

$$\ln y_i = \mu_i \ln y + \ln \varepsilon_{yi},$$

(2)

$$\ln x_i = \nu_i \ln x + \ln \varepsilon_{xi},$$

(3)

где μ_i, ν_i - параметры, ε_{xi}, ε_{yi} - случайные остатки. Заметим, что значение коэффициентов μ_i и ν_i зависит от размера предприятия i. Очевидно, что для крупных предприятий соответствующие коэффициенты будут больше, чем для малых.

Просуммировав (2), получим:

$$\sum_i \ln y_i = \sum_i \mu_i \ln y + \sum_i \ln \varepsilon_{yi} = \ln\left(\prod_i y_i\right) = \ln\left(\prod_i x_i^{\alpha_i}\right)$$

(4).

Из (3) можно найти:

$$\ln\left(\prod_i x_i^{\alpha_i}\right) = \sum_i \left(\alpha_i \nu_i \ln x + \alpha_i \ln \varepsilon_{xi}\right)$$

(5).

С учетом (5) выражение (4) преобразуется к виду:

$$\sum_i \mu_i \ln y + \sum_i \ln \varepsilon_{yi} = \sum_i \left(\alpha_i \nu_i \ln x + \alpha_i \ln \varepsilon_{xi}\right),$$

откуда:

$$y^{\sum\limits_i \mu_i} = x^{\sum\limits_i \alpha_i \nu_i} \left(\frac{\prod\limits_i \varepsilon_{xi}^{\alpha_i}}{\prod\limits_i \varepsilon_{yi}} \right),$$

или

$$y = x^{\alpha} \varepsilon,$$

где $\alpha = \dfrac{\sum\limits_i \alpha_i \nu_i}{\sum\limits_i \mu_i}$,

$$\varepsilon = \frac{1}{\sum\limits_i \mu_i} \frac{\prod\limits_i \varepsilon_{xi}^{\alpha_i}}{\prod\limits_i \varepsilon_{yi}}.$$

Таким образом, получаем, что макропараметр α есть средневзвешенное из микропараметров, где в качестве весов берутся коэффициенты регрессионных уравнений (2)-(3). Это фактически означает, что коэффициенты производственных функций крупных предприятий имеют больший вес в выражении для определения параметров макрофункции. Такая ситуация может привести к ряду искажений при интерпретации макропроизводственной функции.

Так, в нашем примере макропараметр α является показателем эффекта масштаба и имеет следующую интерпретацию: на сколько процентов увеличится национальный выпуск при увеличении затрат фактора на один процент. Однако при ответе на данный вопрос в том случае, если не все предприятия в экономике обладают одинаковой производственной функцией, появляется ряд дополнительных соображений. Важным является то, как распределяется дополнительная единица фактора между предприятиями. В зависимости от того, за счет каких фирм происходит увеличение выпуска возможно существование различных значений параметров производственной функции и технических характеристик производственного процесса при одних и тех же значениях аргументов макрофункции.

Именно неоднозначность макропроизводственной функции, построенной при невыполнении необходимых предпосылок, не позволяет интерпретировать ее как соотношение, описывающее технологические процессы в экономике. Такая макрофункция носит статистический характер и может быть использована для описания происходивших в экономике за определенный период времени производственных процессов. Однако на ее основе нельзя сделать определенные выводы о технических характеристиках данных производственных процессов или построить прогнозы о дальнейшем их развитии.

Рассмотрим теперь более сложный случай двухфакторной производственной функции. Производственная функция теперь имеет следующий вид:

$$y_i = a_i x_{1i}^{\alpha_i} x_{2i}^{\beta_i},$$

где a_i, α_i, β_i– параметры, в общем случае разные для всех фирм, x_{1i} и x_{2i} - объемы затрат капитала и труда соответственно.

Макроэкономическую производственную функцию зададим следующим образом:

$$y = a x_1^{\alpha} x_2^{\beta},$$

где, как и раньше, $y = \sum_i y_i$, $x_1 = \sum_i x_{1i}$, $x_2 = \sum_i x_{2i}$.

Рассмотри взаимосвязь микропараметров α_i, β_i с макропараметрами α, β.

Вновь рассмотрим зависимости между индивидуальными и агрегированными показателями выпуска и факторных затрат. Однако в случае многофакторной производственной функции необходимо учитывать зависимость между факторами. Поэтому регрессионные уравнения примут вид:

$$\ln y_i = \mu_{0i} + \mu_i \ln y + \ln \varepsilon_{yi},$$

$$\ln x_{1i} = \omega_{1i} + \nu_{1i} \ln x_1 + \eta_{1i} \ln x_2 + \ln \varepsilon_{1i},$$

$$\ln x_{2i} = \omega_{2i} + \nu_{2i} \ln x_1 + \eta_{2i} \ln x_2 + \ln \varepsilon_{2i},$$

где μ_{0i}, μ_i, ω_{1i}, ν_{1i}, η_{1i}, ω_{2i}, ν_{2i}, η_{2i} - параметры, ε_{1i} ε_{2i} ε_{yi} - случайные остатки.

Используя ту же логику рассуждений, что и в предыдущем простом примере. Получаем:

$$\sum_i \ln y_i = \ln\left(\prod_{i=1}^{N} y_i\right) = \ln\left(\sum_i \mu_{0i} + \sum_i \mu_i \ln y\right) = \ln\left(\prod_{i=1}^{N} a_i x_{1i}^{\alpha_i} x_{2i}^{\beta_i}\right),$$

откуда

$$y^{\sum_i \mu_i} e^{\sum_i \mu_{0i}} \prod_i \varepsilon_{yi} = \prod_i a_i e^{\sum_i (\alpha_i \omega_{1i} + \beta_i \omega_{2i})} x_1^{\sum_i (\alpha_i \nu_{1i} + \beta_i \nu_{2i})} x_2^{\sum_i (\alpha_i \eta_{1i} + \beta_i \eta_{2i})} \prod_i \varepsilon_{1i}^{\alpha_i} \prod_i \varepsilon_{2i}^{\beta_i},$$

или

$$y = a x_1^{\alpha} x_2^{\beta} \varepsilon,$$

где

$$\alpha = \frac{\sum_i (\alpha_i \nu_{1i} + \beta_i \nu_{2i})}{\sum_i \mu_i}, \quad \beta = \frac{\sum_i (\alpha_i \eta_{1i} + \beta_i \eta_{2i})}{\sum_i \mu_i},$$

$$a = \frac{\prod_i a_i e^{\sum_i (\alpha_i \omega_{1i} + \beta_i \omega_{2i})}}{e^{\sum_i \mu_{0i}}}, \quad \varepsilon = \left(\frac{\prod_i \varepsilon_{1i}^{\alpha_i} \prod_i \varepsilon_{2i}^{\beta_i}}{\prod_i \varepsilon_{yi}}\right)^{1/\sum_i \mu_i}.$$

Получаем, что для двухфакторной производственной функции значения макропараметров уже не являются взвешенными средними соответствующих им микропараметров. Теперь каждый макропараметр определяется *всеми* микропараметрами. Это еще больше усложняет интерпретацию макропроизводственной функции. Так, если для отдельного предприятия измерителем эластичности выпуска по капиталу служит коэффициент α_i, для экономики в целом чувствительность агрегированного выпуска к агрегированным затратам капитала определяется сложной комбинацией из коэффициентов α_i и β_i. При этом, как и в предыдущем простом случае, измеренные посредством макрофункции технические характеристики производственного процесса в экономике зависят не только от используемой отдельными предприятиями технологии, но и от распределения факторов между ними.

Таким образом, проведенный анализ показал, что при невыполнении ряда жестких предпосылок макроэкономическая производственная функция является некоторым осреднением производственных соотношений, наблюдавшихся в экономике за определенный период времени, и не позволяет определить технические характеристики производственных процессов в экономике. Поэтому для исследования производственных процессов может оказаться необходимым привлечение микроэкономических данных.

Чтобы оценить последние достижения в моделировании производственных функций и понимании природы основных источников экономического роста, а также рассмотреть сопутствующие дискуссии, необходимо сравнить их с совокупностью теорий, которые существовали до текущего взрыва активности. В данной работе сначала рассмотрим теоретическую модель экономического роста в наиболее общей форме, сформулированную в работе [69], и общие ограничения, которые налагаются на производственную функцию. Далее мы обсудим целесообразность использования моделей общего равновесия для эмпирического исследования свойств экономического роста и производственных функций. Затем изложим различные варианты неоклассической модели роста, которая преобладала до 1985 года. Далее опишем некоторые основные подходы к теории эндогенного роста и те модификации производственных функций, которые при этом использовались. В завершение рассмотрим дополненную модель эндогенного роста Шумпетера, и приведем дискуссии, касающиеся неоклассических и эндогенных теорий экономического роста. Параллельно с этим изложим основные подходы к моделированию производственных функций и исследованию роста, опубликованные в отечественной литературе.

2. Обзор зарубежного и российского опыта применения производственных функций в моделях роста

2.1 Общая теоретическая модель

Чтобы продемонстрировать основные свойства производственной функции, не указывая конкретный вид функциональной зависимости, и вывести регрессионные уравнения, описывающие рост выпуска в обобщенной форме рассмотрим следующую теоретическую модель. Пусть в закрытой экономике [69] объем общего выпуска равен Y. Затраты труда в производстве равны N и, предположим, что каждая единица рабочей силы обладает запасом человеческого капитала H, так, что эффективный вклад труда в выпуск равен $\tilde{N} = NH$. Чтобы учесть различные виды физического капитала, запишем их в виде вектора $K=(K_1,K_2,...)$. Пусть скаляр A отражает состояние технологии.

Далее в работе мы будем рассматривать две различных производственных функции.

$$Y = \tilde{F}(K, \tilde{N}, A),$$

где

$$\tilde{F}(K, \tilde{N}, A) = F(K, \tilde{N}A)$$

(6а)

или

$$\tilde{F}(K, \tilde{N}, A) = AF(K, \tilde{N})$$

(6б).

Разница состоит между ними в том, является ли технический прогресс "трудодополняющим" (*labour-augmenting*) (6а) или нейтральным по Хиксу (6б). В большинстве случаев будет использоваться первая форма производственной функции.

Предположим, что функция F дважды дифференцируема, однородна 1-ой степени, возрастающая, совместно выпуклая вверх по всем переменным и строго выпукла вверх по каждой в отдельности. Также потребуем выполнение следующих условий для функции F (условий Инады)

$$\forall l \text{ и } \forall A,\ \tilde{N}, K_1^+, K_2^+, ..., K_{l-1}^+, K_{l+1}^+, ... > 0 : \qquad \lim_{K_l \to 0} \tilde{F}(K_1^+, K_2^+, ..., K_{l-1}^+, K_l^+, K_{l+1}^+, ..., A, \tilde{N}) \geq 0 \qquad (7)$$

$$\forall l : \qquad \lim_{K_l \to 0} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial K_l} \to \infty \qquad (8)$$

Следует отметить, что указанные выше ограничения являются слишком жесткими и далее при рассмотрении моделей эндогенного роста различные комбинации этих ограничений будут ослаблены. Определим эффективную производительность труда как $\tilde{y} \overset{def}{=} Y / \tilde{N}A$ и вектор капиталовооруженности как $\tilde{k} \overset{def}{=} (\tilde{N}A)^{-1} K$. Эти переменные ненаблюдаемые, однако мы можем записать их измеряемые эквиваленты:

$$y \overset{def}{=} HA \times \tilde{y} = Y / N$$

$$k \overset{def}{=} (k_1, k_2, ...) = HA \times k = N^{-1} K$$

Из этих определений следует, что $y = F(k, HA)$ из (6а) и $y = AF(k, H)$ из (6б). В свою очередь при предположении (6а) общий выпуск можно переписать в следующем виде (*производственная функция в интенсивной форме*)

$$Y = \tilde{N}A \times F((\tilde{N}A)^{-1} K, 1) \Rightarrow \tilde{y} = f(\tilde{k})\text{, где } f(\cdot) \overset{def}{=} F(\cdot, 1)$$

Рассмотрим возможности роста в этой модели. Нетрудно показать, что темп прироста выпуска на единицу рабочей силы можно записать в виде:

$$\frac{\dot{y}}{y} = \left(\frac{\dot{H}}{H} + \frac{\dot{A}}{A}\right) + f(\tilde{k})^{-1}\left[\nabla f(\tilde{k})\right]' \frac{d\tilde{k}}{dt}.$$

Но, с другой стороны:

$$\left[\nabla f(\tilde{k})\right]' \frac{d\tilde{k}}{dt} = \left(\tilde{k}_1 \partial f\left(\tilde{k}\right) / \partial \tilde{k}_1, \tilde{k}_2 \partial f\left(\tilde{k}\right) / \partial \tilde{k}_2, \ldots\right) \begin{pmatrix} \dot{k}_1 / k_1 - \dot{H} / H - \dot{A} / A \\ \dot{k}_2 / k_2 - \dot{H} / H - \dot{A} / A \\ \vdots \end{pmatrix}$$

так, что определяя

$$s_l(\tilde{k}) = \left[\frac{\tilde{k}_l \times \partial f(\tilde{k}) / \partial k_l}{f(\tilde{k})}\right]$$

получаем уравнения роста:

$$\frac{\dot{y}}{y} = \left(\frac{\dot{H}}{H} + \frac{\dot{A}}{A}\right) + \sum_l s_l(\tilde{k}) \times \left\{\dot{k}_l / k_l - \dot{H} / H - \dot{A} / A\right\},$$

(9а)

или

$$\frac{\dot{y}}{y} = \sum_l s_l(\tilde{k}) \times \dot{\tilde{k}}_l / \tilde{k}_l.$$

Повторяя аналогичные рассуждения для (1б) получаем следующее уравнение роста

$$\frac{\dot{y}}{y} = \left(\frac{\dot{H}}{H} + \frac{\dot{A}}{A}\right) + \sum_l s_l(\tilde{k}A) \times \left\{\dot{k}_l / k_l - \dot{H} / H\right\}.,$$

(9б)

где функции s_l определены аналогично рассмотренному выше случаю только для аргумента $\tilde{k}A$. Каждая s_l неотрицательна для любого значения аргумента и их сумма ограничена сверху единицей. Если F – производственная функция Кобба-Дугласа, то каждая s_l – константа. В общем случае неотрицательность и ограниченность s_l следует из предположений, что F – возрастающая, однородная и выпуклая вверх.

Чтобы изучать динамику системы при различных экономических предположениях вначале введем некоторые определения. Назовем сбалансированным ростом (*balanced growth*) совокупность временных траекторий в пространстве наблюдаемых величин *(y,k)* таких, что

$$\dot{y}/y = \dot{k}_l / k_l = \text{constant, для } \forall l \,. \tag{10}$$

Равновесием сбалансированного роста (*balanced growth equilibrium*) назовем совокупность временных траекторий в пространстве *(y,k)*, удовлетворяющих условию сбалансированного роста (10) и согласующихся с решениями всех экономических агентов в определенной модели. И, последнее, равновесием, стремящимся к сбалансированному росту (*equilibrium tending towards balanced growth*) назовем совокупность траекторий в пространстве *(y,k)*, согласующихся с конкретной экономической моделью и удовлетворяющих следующему условию:

$$\lim_{t\to\infty} \dot{y}(t)/y(t) \text{ существует, и } \lim_{t\to\infty}(\dot{y}(t)/y(t) - \dot{k}_l(t)/k_l(t)) = 0, \forall l \tag{11}$$

условия (10) и (11) предназначены для использования с наблюдаемыми переменными y и k. В теоретических моделях более удобно использовать “скорректированные на технологию” (*technology adjusted*) переменные $\tilde{y}$ и $\tilde{k}$. Переход от наблюдаемых величин к теоретическим тривиален и часто будет применяться при дальнейшем обсуждении. Также следует отметить, что (10) и (11) пригодны в детерминированных моделях. В случае стохастических моделей, условия необходимо модифицировать в терминах ожиданий и дисперсий.

В широко известном случае – модели неоклассического роста с экзогенным техническим прогрессом – предполагается, что технология имеет вид:

$$A(t) = A(0)e^{\xi t},$$

где ξ – экзогенно заданный постоянный темп технического прогресса. Равновесный сбалансированный рост в этом случае получается, если *(y,k)* растут с темпом ξ, и, таким образом, следует, что величины ($\tilde{y}$, $\tilde{k}$) постоянны и конечны. Это равновесие при стандартных предположениях, которые были сделаны ранее, существует почти для всех начальных значений *k*. В других ситуациях, например, эндогенного роста, нет гарантии, что равновесный сбалансированный рост существует. В таком случае нас будет интересовать, существуют ли равновесные траектории, которые стремятся к сбалансированному росту и, если они существуют, то какими характеристиками обладают.

Если рынки факторов производства являются конкурентными, и *F* полностью описывает вклад факторов производства в выпуск, тогда s_l определяет долю фактора *l* в общем выпуске, уплаченную владельцу *l*-ого физического капитального блага. Однако приведенные выше рассуждения не включали никаких предположений относительно структуры рынков, поведения экономических агентов, процессов накопления капитала и технического прогресса и т.д. Производственные функции (6а) и (6б) подразумевают, соответственно, (9а) и (9б) вне зависимости от того, является ли норма сбережения эндогенной (подход Касса–Купманса (Cass–Koopmans) [44, 124]) или экзогенной (формулировка Солоу-Свана (Solow-Swan) [185, 186, 190]). Выводы, сделанные здесь, не зависят от того, задается ли технология *A* экзогенно или эндогенно через накопление физического капитала или инвестиции в R&D. Таким образом, альтернативные теории роста, которые различаются только в определении конкретного вида *F*, могут сравниваться при изучении различных ограничений, которые они налагают на динамику (9а) или (9б).

С точки зрения эмпирической проверки конкретных моделей, если они различаются существенным образом только в определении производственной функции, то формулирование их в терминах общего равновесия представляется нецелесообразным. Т.е. такие формулировки моделей важны для поиска существования или оптимальности и иногда могут налагать дополнительные ограничения на поведения конкретных агрегатов. Однако они не обеспечивает принципиально новых эмпирических результатов. В самом деле, такие исследования как Барро и Сала-и-Мартин (Barro and Sala-i-Martin [20, 21]) используя формулировки общего равновесия при эмпирическом подтверждении результатов своего анализа, рассматривали регрессионные модели, эквивалентные модели Солоу-Свана [185, 186, 190] с экзогенной нормой сбережения.

Многие подходы к эмпирическому анализу экономического роста могут рассматриваться как изучение следствий из (9а) или (9б). Например, предполагая, что рост описывается уравнением (4а), исследователь, изучающий основные факторы долгосрочного экономического роста может рассматривать ситуации, когда последнее слагаемое, включающее различные капитальные запасы исчезает, и анализировать только экономические силы, влияющие на $\dot{H}/H$ и $\dot{A}/A$. Наоборот, исследователь, который заинтересован в динамике временных траекторий, определяемых $\dot{H}/H + \dot{A}/A$, должен рассматривать только $\sum_l s_l(\tilde{k}) \times \left\{ \dot{k}_l/k_l - \dot{H}/H - \dot{A}/A \right\}$ или $\sum_l s_l(\tilde{k}A) \times \left\{ \dot{k}_l/k_l - \dot{H}/H \right\}$, принимая как заданные (обуславливая по) $\dot{H}/H$ и $\dot{A}/A$. Такой подход применялся при изучении условной сходимости β (в цитируемых работах $\beta = -\lambda$), например, Барро и Сала-и-Мартин [21] или Мэнкью, Ромер и Вейль (Mankiw, Romer and Weil [136]).

2.2 Модели производственной функции в отечественной литературе

Напомним, что производственная функция определяется как технологическая зависимость между количеством используемых экономических ресурсов и максимально возможным объемом выпуска при данном способе производства и характеризует техническую зависимость между ресурсами и выпуском. Начиная с известной работы Кобба и Дугласа[2], наиболее часто моделирование производства сводилось к спецификации производственной функции относительно основного капитала и труда в качестве факторов, характеризующих производственный процесс, а также каких-либо структурных параметров. Такой достаточно общий вид функции связан с необходимостью количественного оценивания параметров в условиях ограниченного доступа к необходимой информации. Н. К. Козлов (1997,1998) предлагает способы частичного преодоления этой трудности, во-первых, путем

[2] Cobb, C.W., Douglas P. H., “A Theory of Production”, American Economic Review, 1928, n.1

исключения из производственной функции части затрат труда, которая коррелирует с основным капиталом, и, во-вторых, за счет корректировки показателя выпуска на величину, характеризующую лаг "затраты-выпуск".

Проблема в первом случае состоит в том, что параметрами производственной функции, как правило, являются основной капитал и затраты труда. Однако очевидно, что эти две переменные должны быть взаимосвязаны, поскольку затраты труда неявно заданы массой используемого капитала. Как следствие, оценивание параметров производственной функции должно приводить к "плохим" со статистической точки зрения свойствам, в связи с чем возникает необходимость уточнения понятия "фактор производства". Автор предлагает использовать в качестве переменной основного капитала только стоимость его активной части (за вычетом стоимости зданий и сооружений), поскольку она наиболее коррелированна с выпуском. В качестве затрат труда предлагается использовать время, отработанное за год всеми рабочими, представленное как произведение среднегодовой численности рабочих R_t и времени, отработанного за год одним рабочим, W_t. Такое представление позволяет выделить из переменной, характеризующей трудовые затраты, часть, существенно связанную с основным капиталом с соответствующим замещением. Эти уточнения, согласно автору статьи, улучшают корреляцию между объясняющими переменными.

В статье (1998) Н. К. Козлов обосновывает необходимость учета в производственных функциях лага "затраты-выпуск", или переменной незавершенного производства. Данный фактор, определяющий выпуск, часто упускается из виду, поскольку предполагается учтенным в исходной статистике. Однако роль лага "затраты-выпуск" существенна в условиях высокой динамики переменных. Так, если выпуск увеличивается, то б*о*льшая, чем обычно, часть затрат, осуществленных в конце года, воплощается не в выпуске готовой продукции, а в остатке незавершенного производства на конец года. Если же выпуск сокращается, то в первую очередь уменьшается остаток на конец года.

Авторы предлагают сделать естественное преобразование производственной функции с корректировкой на учет данного фактора. Для этого рассматривается следующий вариант производственной функции:

$$Y_t+\Delta N_t=F(K_t, L_t), \qquad (12)$$

где ΔN_t—прирост уровня остатка незавершенного производства за год.

Чтобы соизмерить остаток незавершенного производства с выпуском, необходимо рассматривать затраты с точки зрения *стоимостного аспекта производства*[3]. Согласно данному аспекту, затраты на производство—это не труд и капитал как физические массы, а заработная плата, амортизация, затраты на сырье и материалы, т.е. образующие себестоимость выпуска элементы. Часть затрат списывается на готовую продукцию, остальные — на остаток незавершенного производства. Остаток незавершенного производства образуется лишь затратами, но не себестоимостью выпуска, поэтому остатки нельзя непосредственно увязать с выпуском продукции. Для подсчета остатка предложен подход, согласно которому оценки незавершенного производства можно производить по следующей формуле:

$$U_{N1,год} = 1 - \frac{\ln[Iz - N1(Iz-1)/Z]}{x},$$

где x — логарифмический темп роста затрат;

Iz— темп роста затрат на производство;

Z— годовые затраты на производство, руб.;

$N1$—остаток на конец года, руб.;

Легко заметить, что $U_{N1,год}$—это отрезок времени, в течение которого образовался остаток $N1$, т.е. остатки незавершенного производства выражены в единицах времени.

Для подсчета прироста уровня остатка незавершенного производства автор предлагает пользоваться формулой, учитывающей поправку на изменение во времени производительности:

$$\Delta U_{N,год}(t) = U_{N1,год}(t) - U_{N0,год}(t-1) = U_{N1,год}(t) - U_{N1,год}(t-1)/Iy(t),$$

где $Iy(t)$ —индекс физического объема производства в году t.

Эта величина, выраженная в единицах времени (днях), должна использоваться в качестве поправки ΔN_t в формуле (12). С учетом размерности, можно переписать формулу (12) как

[3] Такая необходимость вызвана тем, что параметры производственной функции выражаются физическими величинами, остаток же незавершенного производства в отчетности отражается в стоимостных единицах и не может быть выражен в физических единицах.

$Y_t(365+ \Delta U_{N,год}(t))=F(K_t, L_t),$

Где выпуск Y_t выражен как среднедневной выпуск.

На основании эмпирического исследования отраслей машиностроения России, проведенного с учетом корректировки факторов, произведенной автором в работе (1997), делается вывод, что учет лага “затраты-выпуск” значительно меняет оценки параметров производственных функций.

Возможность корректировки и более детального описания теоретической модели диктуется исключительно наличием или отсутствием статистических данных. В случае если существуют данные, позволяющие провести более адекватное теории эмпирическое исследование, учет деталей, несомненно, улучшит количественные оценки, если производство действительно описывается выбранной теоретической моделью. Однако вопрос выбора вида производственной функции далеко не очевиден. Наиболее удобным для исследования классом производственных функций являются классы производственных функций Кобба-Дугласа и Солоу, обладающие рядом преимуществ перед остальными моделями. Эти преимущества в основном связаны с простотой применения таких функций для количественного анализа и наличием ряда интересных свойств, таких как постоянство нормы замещения для первой и постоянство эластичности замещения для второй. Г. Б. Клейнер и Д. И. Пионтковский (1999) исследуют системы уравнений, являющиеся эквивалентными многофакторным производственным функциям типа Солоу, что призвано упростить эмпирические исследования, связанные с выбором спецификации производственной функции.

Статья посвящена рассмотрению особого класса производственных функций— функций Солоу — и поиску систем, эквивалентных данному классу функции; предлагаются несколько вариантов однозначной характеризации двух- и многофакторных функций через традиционные характеристики и естественные модификации. Авторы считают, что необходимым условием использования этого параметрического класса для спецификации производственной функции является построение ряда альтернативных систем дифференциальных, интегральных или функциональных уравнений, отражающих соотношения между экономически интерпретируемыми характеристиками производственной функции и составленных таким образом, что решением системы будет в точности данный параметрический класс.

Анализ распространяется со стандартной двухфакторной функции, предложенной Солоу в 1956 году, на многомерное расширение. Авторы предлагают характеризовать производственные функции Солоу (Мукерджи) с помощью дифференциального описания. Параметризация многофакторной производственной функции проводится для многомерного варианта CES[4]-функции с помощью введения переменных q и p для каждого фактора i, определяемых формулами:

$$q_i(\ln f, \ln x_i, v_1, ..., v_{n-2}) = \frac{\partial \ln f_i}{\partial \ln f},$$

$$p_i(\ln f, \ln x_i, v_1, ..., v_{n-2}) = \frac{\partial \ln f_i}{\partial \ln x_i},$$

где $v_i=x_i/x_m$, а также параметром r_i^j[5]:

$$r_i^j(\ln f, \ln x_i, v_1, ..., v_{n-2}) = \frac{\partial \ln f_i}{\partial \ln v_i};$$

при этом q_i имеет смысл величины процентного изменения предельной производительности соответствующего фактора при изменении объема выпуска на 1% (при условии постоянности всех факторов производства) или, что то же самое, эластичности предельной производительности фактора i по выпуску; p_i — эластичность предельной производительности фактора i по объему фактора. Авторы показывают, что производственная функция является функцией Солоу в том и только в том случае, если выполнено одно из двух эквивалентных условий:

- $\forall\ 1 \geq i \geq n\ p_i=const,\ q_i=const$, причем $p_i \neq -1,\ q_i \neq 1$ и $\forall\ 1 \geq j \geq n-2,\ 1 \geq i \geq n\ r_i^j \equiv 0;$
- $\forall\ 1 \geq k \geq n,\ p_k=const$, причем $p_k \neq -1$ и существует $i:\ 1 \geq i \geq n,\ \ \forall\ 1 \geq j \geq n-2\ r_i^j \equiv 0$, *а* $q_i=const$, причем $q_i \neq 1$.

Рассмотрим математическую формулировку эквивалентных условий функции Солоу с экономической точки зрения. Во-первых, заметим, что каждое из них требует постоянности эластичности предельной производительности по любому фактору, т.е. можно утверждать, что данное условие является необходимым для того, чтобы производство описывалось технологией Солоу. Подразумевается, что

[4] Constant Elasticity of Scale.

[5] Стоит заметить, что тождественное равенство нулю функции r_i^j при всех j от 1 до $n-2$ означает, что величина изменения предельной производительности фактора i при постоянном объеме выпуска и постоянном значении этого фактора не зависит от соотношений остальных факторов.

переменная r_i^j есть либо тождественный ноль при всех предельных производительностях для всех либо хоть для одного относительного объема фактора. То есть функция Солоу обладает следующим важным свойством: эластичность предельной производительности каждого фактора в технологии, описываемой функцией Солоу, не зависит от соотношений объемов какой-либо пары факторов. То есть, каковы бы ни были пропорции между факторами, это никак не сказывается на эффективности производства.

Существование подобных технологий кажется оправданным на макроэкономическом уровне, где происходит значительное агрегирование факторов производства. Однако в применении к микроэкономическим подходам к моделированию производства можно найти ситуации, когда необходимое условие не выполнено, т.е. технология не может описываться функцией Солоу. Это, скажем, деятельность, связанная с химическим производством, где относительное увеличение катализаторов химических реакций значительно ускоряет процесс получения продукта и, таким образом, непропорционально увеличивает производительность факторов.

Неравенство q_i единице означает, что увеличение выпуска на один процент при равном значении фактора i и прежних соотношениях между другими факторами не может приводить к однопроцентному увеличению производительности. Однако вопрос ограничивается именно такой постановкой, т.е. увеличение производительности фактора может быть как больше, так и меньше 1%. Аналогично, неравенство –1 характеристики p_i означает, что увеличение фактора на 1% не может уменьшить производительность на 1%, при прочих равных, т.е. производительность опять же может как расти, так и падать. Условие постоянности эластичности предельной производительности по выпуску подразумевает, что ни изменения выпуска, ни изменения размеров используемых факторов не меняют степень воздействия на скорость роста объемов производства.

Итак, можно обобщить: при определении типа производственной технологии с подозрением на технологию типа Солоу первое, на что необходимо обращать внимание, это степень подверженности изменению предельной производительности факторов, причем прежде всего необходимо проверять изменчивость производительности в зависимости от объемов факторов. Далее необходимо по возможности определить, возможно ли сохранение пропорциональных темпа роста производительности при увеличении выпуска хоть для одного фактора и независимость его от соотношения между другими факторами. В случае обнаружения данных характеристик применение функций Солоу (Мукерджи) для описания производственного процесса будет вполне корректным, в другом же случае можно утверждать, что производство не может быть описано данным классом функций.

В заключение авторы обобщают на многомерный случай теорему о виде однородной двухфакторной производственной функции, допускающей линеаризацию с помощью автономного шкалирования переменных. Показывается, что всякая квазиоднородная, линеаризируемая с помощью некоторого шкалирования, функция является функцией Солоу. В случае если производственная функция однородна по своим аргументам и для нее возможна линеаризация возрастающими, дважды непрерывно дифференцируемыми функциями, тогда данная функция является либо производственной функцией Кобба-Дугласа, либо имеет вид CESM[6].

Несмотря на то, что количественное исследование многофакторных функций не представляет непреодолимых трудностей и в производстве задействовано значительное большее двух число факторов, теоретические модели производства, как правило, основаны на двухфакторных функциях. Это связано с чрезвычайным усложнением спецификации и теоретических выкладок при увеличении числа факторов. Изучение многофакторных моделей является фундаментальной задачей в теории производственных функций. В то время как рассмотрение свойств функций с характеристикой постоянной эластичности замещения для однородных двухфакторных функций достаточно тривиально, обобщение их на случай производственных функций многих переменных не представляется возможным без дополнительных предположений. Г. Б. Клейнер, Д. И. Пионтковский (2000) предложили выделить для особого изучения новый класс многофакторных производственных функций, обладающих свойством постоянности эластичности предельной нормы замещения и еще одной постоянной характеристикой, предложенной самими авторами и называемой ими эластичностью

[6] Определение частного случая функции Мукерджи, для которого степенные показатели факторов равны между собой, данное авторами статьи.

пропорционального роста, определяемой для n-мерной производственной функции $y=f(x_1,\ldots,x_n)$ по формуле[7]:

$$EG_{ij} = (\frac{\partial MRS_{ij}}{\partial f} \Big/ \frac{MRS_{ij}}{f})^{-1},$$

и представляющей собой эластичность предельной нормы замещения факторов по масштабу производства.

Для определения характеристики частной эластичности замещения авторы вводят следующую формулу:

$$ES_{ij}^{k} = (\frac{\partial MRS_{ij}}{\partial z_{k,k+1}} \Big/ \frac{MRS_{ij}}{z_{k,k+1}})^{-1},$$

где $z_{a,b}$— отношения фактора x_a к x_b. Данное определение является лишь частным случаем общего определения частной эластичности замещения факторов, где отношение факторов $z_{i,j}$ необязательно является упорядоченным, однако рассмотрение данной характеристики удобно, поскольку отношение произвольной пары факторов можно выразить через упорядоченные отношения $z_{k,l}$[8].

Производственная функция Кобба-Дугласа, например, эквивалентна выполнению следующих соотношений при $1 \le i < j \le n,\ 1 \le k \le n-1$:

$$\begin{cases} EG_{ij} = \infty; \\ 1, \quad i \le k \le j-1; \\ ES_{ij}^{k} = \infty, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Бесконечность эластичности пропорционального роста для любых двух факторов есть следствие нулевого прироста предельной нормы замещения при увеличении выпуска — в этом проявляется основное свойство производственной функции Кобба-Дугласа—постоянность предельной нормы замещения для всех факторов. Эластичность замещения также либо постоянна и равна единице, либо бесконечна, причем данное разделение зависит лишь от нумерации факторов.

[7] Показано, однако, что для случая двухфакторной гомотетичной функции введение данной характеристики оказывается бессмысленным.

[8] Это утверждение, безусловно, не выполнено для однородных производственных функций, для которых не справедливы дальнейшие выводы авторов. Также не рассматриваются случаи факторов, для которых MRS равна нулю.

В качестве объекта исследования были рассмотрены многофакторные функции с постоянными эластичностями замещения и пропорционального роста для заданных пар факторов[9]. Оказалось, что при фиксированных $x_3,\ldots,x_n$ класс $CEMRS_{[1,2]}$ функций определяется следующим уравнением[10]:

$$hf^{1/\delta}\int x_1^{c_1}dx_1+\int x_2^{-c_2}dx_2=\phi(f,x_3,\ldots x_n) \qquad (13)$$

где $h=cx_3^{c3}\ldots x_n^{cn}$, $c=const;$

$\phi(\cdot)$—произвольная дифференцируемая функция от n-1 переменной.

Можно выделить несколько вариантов решения данного уравнения:

Условие	*Вид функции*
$c_1\neq -1,\ c_2\neq 1$	$\frac{c}{c_1+1}f^{1/\delta}x_1^{c_1+1}x_3^{c_3}\ldots x_n^{c_n}+\frac{x_2^{1-c_2}}{1-c_2}=\phi(f,x_3,\ldots,x_n)$ (14)
$c_1 = -1,\ c_2\neq 1$	$c\ln x_1 f^{1/\delta}x_3^{c3}\ldots x_n^{cn}+(1-c_2)^{-1}x_2^{1-c2}=\phi(f,x_3,\ldots,xn)$ (15)
$c_1\neq -1,\ c_2=1$	$\frac{c}{c_1+1}f^{1/\delta}x_1^{c_1+1}x_3^{c_3}\ldots x_n^{c_n}-\ln x_2=\phi(f,x_3,\ldots,x_n)$ (16)
$c_1 = -1,\ c_2=1$	$\ln x_1 f^{1/\delta}x_3^{c3}\ldots x_n^{cn}-\ln x2=\phi(f,x_3,\ldots,xn)$ (17)

Здесь $c=const$;

δ - величина эластичности пропорционального роста,

c_1 и c_2 определяются через постоянные значения эластичностей замены факторов σ_1 и σ_2 следующим образом:

$c_2 = 1/\sigma_1 - 1/\sigma_2;$

$c_1 = -1/\sigma_1$.

Данные функции интересны с точки зрения изучения их поведения и свойств, что важно для поиска теоретических основ моделирования реального производственного процесса с заданными характеристиками. В данной статье авторы анализируют производства, задающиеся функциональной формой (14). В

[9] Функции, удовлетворяющие этим двум требованиям, были объединены в класс $CEMRS_{[i]}$ функций (Constant Elasticities of Marginal Rate of Substitution),где *i*—множество номеров факторов, для которых выполнены требования постоянности эластичностей.

[10] Свойство функции принадлежать классу $CEMRS_{[i,j]}$ функций не зависит от порядка аргументов, поэтому такую функцию всегда можно привести к классу $CEMRS_{[1,2]}$.

условиях возрастания и монотонности функции f для разных значений параметров c_1 и c_2 интересно отметить два случая, когда:

1) не происходит “насыщения” производства при фиксированном значении фактора x_1 или x_2 и любых значениях остальных факторов. В качестве примера можно привести производственную функцию, являющуюся степенной суммой функций Кобба-Дугласа:

$$f = (Ax_2^{d2}\dots x_n^{dn} + Bx_1^{d1}\dots x_n^{dn})^{\delta},$$

где $\delta, A, B, d_1, \dots, d_n$ — параметры, причем $d_1 + \dots + d_n = 0$.

Такого типа производство может иметь место, если эластичность предельной замены для первого фактора больше единицы, в то время как для второго фактора она может принимать отрицательные значения.

2) Если же, эластичность предельной замены для одного фактора меньше единицы[11], а для другого фактора эластичность ограничена сверху, то для достижения достаточно большого объема выпуска необходимо очень сильно увеличить использование одного из факторов. Пример такой функции для $n \geq 3$, описывается соотношением:

$$f = (A \ln x_1\, x_3^{d3} \dots x_n^{dn} + B \ln x_1 (\ln x_2)^{-1} x_3^{d3} \dots x_n^{dn})^{\delta},$$

где $\delta, A, B, d_3, \dots, d_n$ — параметры.

Исследование свойств многофакторных производственных функций, как правило, ограничивается трех- либо четырехфакторными моделями. В статье Г. Б. Клейнер, Д. И. Пионтковский (2000) можно найти полное описание таких функций из класса $CESM_{[\cdot]}$, а также некоторые достаточные условия для случая произвольного числа факторов. Также дана полная классификация квазисепарабельных функций с этим условием.

Главной задачей моделирования производства является прогнозирование выпуска, а также определение характеристик производственного процесса. Ввиду случайности оценок параметров и переменных (факторов) появляется необходимость выявления вида распределения прогноза производства для расчета показателей вероятностной гарантии и квантилей, т.е. показателей максимального

[11] т.е. если при однопроцентном увеличении объема задействованного фактора предельная норма замещения заданных факторов i и j увеличивается менее чем на 1%

или минимального гарантированного прогноза. Статья В.П. Котельникова (2001) посвящена выявлению распределения значений производственной функции Кобба-Дугласа, у которой зависимая и объясняющие переменные — случайные векторы с коррелированными компонентами. Проблема в данном случае заключается в невозможности применения предельных теорем теории вероятностей для определения искомого распределения ввиду малого числа факторов, определяющих производство согласно функции Кобба-Дугласа. В условиях известных значений параметров и факторов (средних и ковариаций) в предположении их независимости, а также при известных интервалах изменения случайных значений факторов авторы определяют вид распределения значений производственной функции, т.е. плотность распределения и интегральную функцию распределения, а также вычисляют показатель вероятностной гарантии, квантиль и среднее значение прогнозируемой величины (полученные формулы не вошли в обзор ввиду достаточной громоздкости). Для решения автор использует введенное им ранее понятие многомерного двойного нормального распределения (m-мерное ДНР), а также теорему о предельном распределении суммы коррелированных случайных величин. Итоговое распределение существенным образом определяется на основании исходной информации, что позволяет принимать необходимость более полного учета исходных данных.

2.3 Неоклассическая модель: одно капитальное благо, экзогенный технический прогресс

Рассмотрим неоклассическую модель роста, разработанную Барро и Сала-и-Мартином [21], Кассом [44], Купмансом [124], Солоу [185, 186] и Сваном [190] (*SS*). Как указывалось выше, основные эмпирические выводы неоклассической модели зависят только от предполагаемой производственной функции. Однако некоторые количественные характеристики динамики зависят от других величин. Чтобы учесть их рассмотрим задачу в контексте общего равновесия.

Неоклассическая модель предполагает производственную функцию (6a), дополненную следующими условиями:

$\dot{H}/H = 0,$ причем $\mathrm{H}(0) = 1$

(18a)

$\dot{A} / A = \xi \geq 0,$ где $A(0) > 0$

(18б)

$\dot{N} / N = \nu,$ где $N(0) > 0$ (18в)

$K -$ скаляр, где $K(0) > 0$

(18г)

Эти предположения говорят о том, что происходит накопление только физического капитала; рост населения и технические изменения экзогенны. Также предположим, что

$$\forall \tilde{N}A > 0 : \lim_{K \to \infty} F(K, \tilde{N}A) / K = 0 .$$

(19)

Пусть физический капитал обесценивается экспоненциально с темпом δ > 0. Существует два возможных описания процесса накопления физического капитала. Во-первых, Солоу [185] и Сван [190] предполагали, что сбережения – это постоянная доля дохода τ > 0. Тогда

$$\frac{\dot{\tilde{k}}}{\tilde{k}} = \tau \frac{f(\tilde{k})}{\tilde{k}} - (\delta + \nu + \xi)$$

(20а)

Вторая возможность изложена в работах Касса [44] и Купманса [124]. Предполагается, что сбережения в экономике подчиняются задаче оптимизации:

$$\begin{aligned} & \max_{\{c(t),K(t)\}_{t\geq 0}} N(0) \int_0^{\infty} U[c(t)] e^{-(\rho-\nu)t} dt, \rho > \nu + \xi \geq 0 \\ & \dot{K}(t) = Y(t) - c(t)N(t) - \delta K(t) \\ & U(c) = \frac{c^{1-\theta} - 1}{1-\theta}, \theta > 0 \\ & \text{(1а) и (7а - д)} \end{aligned} \qquad (21)$$

Максимизируемый показатель в (21) это текущая оценка (PV) функции полезности от потребления. Ограничение, налагаемое на $\dot{K}$ говорит о том, что накопление капитала происходит из выпуска, оставшегося после общего потребления и амортизации. Коэффициент θ параметр межвременной эластичности замещения в потреблении, а ρ – дисконтная ставка. Подчеркнем, что мы наложили на ρ дополнительное требование превосходить сумму темпа прироста населения и технического прогресса.

Уравнения (21) определяют потребление и, таким образом, сбережения и инвестиции, которые максимизируют общественное благосостояние. Определим $\tilde{c}$ как потребление на душу населения с поправкой на технологию, т.е. $\tilde{c} = c / A$. Необходимые условия первого порядка следующие:

$$\frac{\tilde{k}}{\tilde{k}} = \frac{f(\tilde{k}) - \tilde{c}}{\tilde{k}} - (\delta + \nu + \xi),$$

$$\frac{\tilde{c}}{\tilde{c}} = \left(\nabla f(\tilde{k}) - [\rho + \delta + \theta\xi]\right)\theta^{-1}$$

$$\lim_{t\to\infty} \tilde{k}(t) e^{-(\rho-\nu-\xi)t} = 0$$

(20б)

Равновесием при сбалансированном росте в данной модели является положительное неизменное во времени технологически нормированное значение объёма капитальных фондов $\tilde{k}$ (вместе с производственной функцией $\tilde{y} = f(\tilde{k})$) такой что при (20а)

$$\tilde{y} = \tilde{k} = 0$$

и при (20б)

$$\tilde{c} = 0,$$

где

$$\tilde{c} = f(\tilde{k}) - (\delta + \nu + \xi)\tilde{k} \in (0, f(\tilde{k})) .$$

(Данное выше определение равновесия сбалансированного роста позволяет нам ограничиться неизменным во времени $\tilde{k}$)

Предсказания сбалансированного роста одинаковы как при предположении (20а) так и (9б). Чтобы показать это заметим, что при равновесии сбалансированного роста (20б) можно найти $\tau\in(0,1)$ такое, что

$$\tilde{c} = f(\tilde{k}) - (\delta + \nu + \xi)\tilde{k} = (1-\tau) f(\tilde{k}) ,$$

так как $\tilde{k}$ и $\tilde{c}$ константы во времени. Таким образом, уравнения (20б) сводятся к (20а).

В связи с этим возникает два вопроса. Во-первых, всегда ли существует равновесие сбалансированного роста и, во-вторых, если эмпирические следствия, получаемые в обеих формулировках, совпадают в состоянии долгосрочного равновесия, различаются ли процессы перехода в точку равновесия.

Можно показать, что существует единственное равновесие сбалансированного роста и что $\tilde{k}$ удовлетворяющее (20а) динамически устойчиво везде в области $\tilde{k} > 0$. Так как $\tilde{y} = f(\tilde{k})$, мы немедленно получаем, что выпуск на эффективную единицу труда также имеет единственное глобальное устойчивое состояние. Динамику модели можно понять, разложив $\log(\tilde{k})$ в ряд Тейлора вблизи устойчивого состояния $\tilde{k}^*$:

$$\tilde{k}/\tilde{k} = \tau(\nabla f(\tilde{k}) - f(\tilde{k})\tilde{k}^{-1})\big|_{\tilde{k}=\tilde{k}^*} \times (\log(\tilde{k}) - \log(\tilde{k}^*)).$$

При использовании производственной функции Кобба-Дугласа можно получить аналитическое решение:

$$\frac{d}{dt}\log(\tilde{k}) = \lambda \times (\log(\tilde{k}) - \log(\tilde{k}^*)),$$

где

$$\lambda \equiv -(1-\alpha)(\delta + \nu + \xi) < 0.$$

Решая это дифференциальное уравнение, получаем следующую динамическую зависимость

$$\begin{aligned} &\log(\tilde{k}(t)) - \log(\tilde{k}^*) = (\log(\tilde{k}(0) - \log(\tilde{k}^*))e^{\lambda t} \Rightarrow \log(\tilde{y}(t)) - \log(\tilde{y}^*) = \\ &= (\log(\tilde{y}(0)) - \log(\tilde{y}^*))e^{\lambda t} \to 0, t \to \infty \end{aligned} \qquad (22а)$$

т.е. логарифмы $\tilde{k}$ и $\tilde{y}$ сходятся к своим устойчивым состояниям экспоненциально с темпом $|\lambda|$. Если α стремится к единице, то эта степень сходимости приближается к нулю, т.е. чем больше коэффициент функции Кобба-Дугласа для физического капитала, тем медленнее логарифм $\tilde{y}$ сходится к своему устойчивому состоянию.

Если в модели используется производственная функция Кобба-Дугласа, уравнение накопления (20а) имеет устойчивый уровень

$$\tilde{y}^* = (\tilde{k}^*)^{\alpha} = \left[\left(\tilde{k}^*\right)^{-(1-\alpha)}\right]^{-\alpha/(1-\alpha)} = \left[\left(\delta + \nu + \xi\right)^{-1}\tau\right]^{\alpha/(1-\alpha)}$$

(23)

Из соотношения (23) следует, что равновесные уровни дохода возрастают по норме сбережения и убывают по темпам прироста рабочей силы.

Перед тем как обсуждать в деталях эмпирические выводы (22а) рассмотрим как варианты Солоу-Свана (20а) и общего равновесия Касса-Купманса (20б) этой модели отличаются в наблюдаемых предсказаниях. Во-первых, перепишем первые два уравнения в (20б) как

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\log(\tilde{k})\\ \log(\tilde{c})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{f(\tilde{k})-\tilde{c}}{\tilde{k}}-(\delta+\nu+\xi)\\ \left(\nabla f(\tilde{k})-[\rho+\delta+\theta\xi]\right)\theta^{-1}\end{pmatrix}.$$

Обозначим ноль функции $\left(\dot{\tilde{k}}/\tilde{k},\dot{\tilde{c}}/\tilde{c}\right)$ как $\left(\tilde{k}^*,\tilde{c}^*\right)$. Тогда при разложении в ряд Тейлора функции $\begin{pmatrix}\log(\tilde{k})\\ \log(\tilde{c})\end{pmatrix}$ с точностью до членов первого порядка в точке $\begin{pmatrix}\log(\tilde{k}^*)\\ \log(\tilde{c}^*)\end{pmatrix}$, получаем

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\log(\tilde{k})\\ \log(\tilde{c})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\nabla f(\tilde{k})-(f(\tilde{k})-\tilde{c})\tilde{k}^{-1} & -\tilde{c}\tilde{k}^{-1}\\ \nabla^2 f(\tilde{k})\tilde{k}\theta^{-1} & 0\end{pmatrix}\Bigg|_{(\tilde{k}^*,\tilde{c}^*)}\times\begin{pmatrix}\log(\tilde{k})-\log(\tilde{k}^*)\\ \log(\tilde{c})-\log(\tilde{c}^*)\end{pmatrix}=M\times\begin{pmatrix}\log(\tilde{k})-\log(\tilde{k}^*)\\ \log(\tilde{c})-\log(\tilde{c}^*)\end{pmatrix}$$

Матрица коэффициентов *M* имеет определитель $\nabla^2 f(\tilde{k})\tilde{c}\theta^{-1}<0$, так что её собственные числа вещественные и разных знаков. Более того, её след

$$\nabla f(\tilde{k}^*)-(f(\tilde{k}^*)-\tilde{c}^*)/\tilde{k}=\rho-(\nu+\xi)+\theta\xi>0$$

Обозначим собственные числа матрицы *M* как $\lambda_1>0>\lambda_2$. Для технологии Кобба-Дугласа $f(\tilde{k})=\tilde{k}^{\alpha}$, собственное значение λ_2 возрастает до 0 в то время как α возрастает до 1. Собственное значение λ_2 определяет динамику вблизи устойчивого состояния как:

$$\begin{pmatrix}\log(\tilde{k}(t))-\log(\tilde{k}^*)\\ \log(\tilde{c}(t))-\log(\tilde{c}^*)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\log(\tilde{k}(0))-\log(\tilde{k}^*)\\ \log(\tilde{c}(0))-\log(\tilde{c}^*)\end{pmatrix}\exp(\lambda_2 t)$$

(24)

Для функции Кобба-Дугласа $\tilde{y}^*=(\tilde{k}^*)^{\alpha}$, первое уравнение в (18) дает

$$\log(\tilde{y}(t))-\log(\tilde{y}^*)=(\log(\tilde{y}(0))-\log(\tilde{y}^*))e^{\lambda_2 t}\to 0, t\to\infty$$

(22б)

Сравнивая (22а) и (22б) можно заметить, что варианты модели (20а) и (20б) представляют одинаковые наблюдаемые результаты не только в равновесном состоянии сбалансированного роста, но и в локальной окрестности особой точки. Темпы сходимости λ и λ_2 имеют различные экономические интерпретации, так как зависят от разных параметров. Однако их зависимость от параметра технологии α одинакова.

Каким образом возможно использовать приведенные выше общие подходы при сравнении роста в разных странах? В литературе, посвященной эмпирическому анализу, обычно исследуется два основных типа моделей: во-первых, предсказания точек покоя сбалансированного роста (*steady-state balanced-growth predictions*) и, во-вторых, предсказания поведения (сходимости) в локальной окрестности точки покоя.

Без потери общности, обозначим коэффициент конвергенции как λ в (22а) и (22б). Из формулы для наблюдаемого дохода на душу населения $y = \tilde{y}HA = \tilde{y}A$ мы имеем:

$$\log(y(t)) = \log(\tilde{y}(t)) + \log(A(t)) = \log(\tilde{y}^*) + [\log(\tilde{y}(0)) - \log(\tilde{y}^*)]e^{\lambda t} + \log(A(0)) + \xi t\,.$$

Более того, так как $\tilde{y}^* = f(\tilde{k}^*)$ и $f(\tilde{k}^*)/\tilde{k}^* = (\delta + \nu + \xi)\tau^{-1}$, существует такая функция g такая, что $\tilde{y}^* = g((\delta + \nu + \xi)^{-1}\tau)$. Таким образом мы можем записать наблюдаемую траекторию подушевого дохода как

$$\begin{aligned}&\log(y(t)) = \log(g((\delta+\nu+\xi)\tau^{-1})) + \log(A(0)) + \xi t + \\ &+ \left[\log(y(0)) - (\log(g((\delta+\nu+\xi)\tau^{-1})) + \log(A(0)))\right]e^{\lambda t}\end{aligned}$$

(25)

и её производная по времени

$$\frac{d}{dt}\log(y(t)) = \xi + \lambda \times \left[\log(y(0)) - (\log(g((\delta+\nu+\xi)\tau^{-1})) + \log(A(0)))\right]e^{\lambda t}$$

(25')

из (14) видно, что *log(y)* имеет две компоненты: сходящуюся компоненту (член, содержащий $e^{\lambda t}$) и компоненту уровня (оставшиеся члены в правой части).

2.4. Неоклассическая модель: несколько капитальных благ

Рассмотрим еще одну модель в рамках стандартного неоклассического подхода. На примере этой модели можно показать как введение дополнительных переменных в уже рассмотренную производственную функцию Кобба-Дугласа позволяет более полно объяснить наблюдаемые результаты. В модели, описанной в работе Мэнкью, Ромера и Вейля [136] (*MRW*), к стандартной модели *SS* добавляется человеческий капитал. Эмпирические выводы из этой модели качественно лучше объясняют межстрановые (*cross-country*) данные по доходу, чем выводы моделей, в которых рассматривается только накопление физического капитала, как в оригинальной работе Солоу. Рассмотрим модель *MRW* в следующей интерпретации.

Опять возьмем производственную технологию (6а) и предположим (18а-в). Вместо (18д) капитал K будет иметь две компоненты. Первая называется физический капитал K_p, а вторая – человеческий капитал K_h:

$$K=(K_p, K_h)' \qquad (18д')$$

Расширим предположения накопления (20а) следующим образом

$$\begin{aligned} &\dot{K}_p = \tau_p Y - \delta_p K_p, \tau_p, \delta_p > 0 \\ &\dot{K}_h = \tau_h Y - \delta_h K_h, \tau_h, \delta_h > 0 \qquad (20а') \\ &\tau_p + \tau_h < 1 \end{aligned}$$

Эффективный капитальный запас, скорректированный на технологию, запишем в виде $\tilde{k} = (\tilde{k}_p, \tilde{k}_h)'$ где $\tilde{k}_p = K_p / \tilde{N}A$ и $\tilde{k}_h = K_h / \tilde{N}A$, удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} &\tilde{k}_p / \tilde{k}_p = \tau_p \tilde{y} / \tilde{k}_p - (\delta_p + \nu + \xi) \\ &\tilde{k}_h / \tilde{k}_h = \tau_h \tilde{y} / \tilde{k}_h - (\delta_h + \nu + \xi) \end{aligned}$$

Равновесие сбалансированного роста есть не зависящая от времени тройка чисел $(\tilde{y}, \tilde{k}_p, \tilde{k}_h)^*$, такая, что

$$\begin{aligned} &\tilde{y}^* = f(\tilde{k}_p^*, \tilde{k}_h^*) \\ &\tau_p \tilde{y}^* / \tilde{k}_p^* = (\delta_p + \nu + \xi) \\ &\tau_h \tilde{y}^* / \tilde{k}_h^* = (\delta_h + \nu + \xi) \end{aligned}$$

Тогда, если F функция Кобба-Дугласа, такая что $f(\tilde{k}_p, \tilde{k}_h) = (\tilde{k}_p)^{\alpha_p} (\tilde{k}_h)^{\alpha_h}$, где α_p, $\alpha_h > 0$ и $\alpha_p + \alpha_h < 1$, прямой расчет дает следующее равновесие сбалансированного роста:

$$\begin{pmatrix} \log(\tilde{k}_p^*) \\ \log(\tilde{k}_h^*) \end{pmatrix} = (1 - \alpha_p - \alpha_h)^{-1} \begin{pmatrix} (1-\alpha_h)\log((\delta_p + \nu + \xi)^{-1}\tau_p) + \alpha_h \log((\delta_h + \nu + \xi)^{-1}\tau_h) \\ \alpha_p \log((\delta_p + \nu + \xi)^{-1}\tau_p) + (1-\alpha_p)\log((\delta_h + \nu + \xi)^{-1}\tau_h) \end{pmatrix}$$

и

$$\log(\tilde{y}^*) = (1 - \alpha_p - \alpha_h)^{-1}[\alpha_p \log((\delta_p + \nu + \xi)^{-1}\tau_p) + \alpha_h \log((\delta_h + \nu + \xi)^{-1}\tau_h)] \qquad (23')$$

Уравнение (23’) – это *MRW* предсказание уровней равновесия (аналогично модели *SS*). Оно сводится к предыдущей модели при α_h равно 0, в противном случае равно среднему геометрическому от вкладов физического и человеческого капитала.

Легко показать, что в фазовом пространстве $(\tilde{k}_p, \tilde{k}_h)$, что эта система глобально устойчива и стремится к положению равновесия сбалансированного роста. В общем, вся динамика, включая $\tilde{y}$, зависит от двухкомпонентного вектора состояния $(\tilde{k}_p, \tilde{k}_h)$. Это предполагает, что в регрессионном уравнении, описывающем рост, изучение одноразмерного коэффициента только при начальном доходе, дает неверную картину динамики вблизи устойчивого состояния. Однако при наложении дополнительных ограничений и условий на параметры модели уровень $\tilde{y}(t)$ может адекватно отражать поведение вблизи равновесия $\tilde{y}$ независимо от состояния $(\tilde{k}_p(t), \tilde{k}_h(t))$.

В работе *MRW* это было достигнуто путем уравнивания темпов обесценения человеческого и физического капитала, т.е. $\delta_p = \delta_h = \delta$. Учитывая то, что производственная функция имеет вид Кобба-Дугласа и разлагая $\log(\tilde{y})$, $\log(\tilde{k}_p)$ и $\log(\tilde{k}_h)$ в ряд Тейлора, получаем:

$$\frac{\dot{\tilde{y}}}{\tilde{y}} = -(1-\alpha_p-\alpha_h)(\delta+\nu+\xi)\times(\log(\tilde{y})-\log(\tilde{y}^*)).$$

При таком предположении модели *MRW* траектория (25) изменяется так, что компоненты уровня и сходимости включают члены с τ_h и α_h. Однако, основные выводы модели, которые можно подвергнуть эмпирической проверке, остаются неизменными. Наблюдаемый подушевой доход эволюционирует к равновесию сбалансированного роста как *A(t)*; в отдалении от устойчивого состояния наблюдаемый подушевой доход сходится к этой траектории сбалансированного роста.

Модель *MRW* использовалась как основа для множества эмпирических исследований. Рассмотрим более подробно регрессионные соотношения для тестирования предсказаний системы. Обозначим $\lambda \overset{def}{=} -(1-\alpha_p-\alpha_h)(\delta+\nu+\xi) < 0$, таким образом

$$\log(\tilde{y}(t)) - \log(\tilde{y}^*) = \left[\log(\tilde{y}(0)) - \log(\tilde{y}^*)\right]e^{\lambda t} \Rightarrow \log(\tilde{y}(t+T)) - \log(\tilde{y}^*) = \left[\log(\tilde{y}(t)) - \log(\tilde{y}^*)\right]e^{\lambda T}$$

.

Преобразуя, чтобы получить наблюдаемое значение *y(t)*, получаем

$$\log(y(t+T)) - \log(y(t)) = (1-e^{\lambda T})\log(\tilde{y}^*) + (e^{\lambda T}-1)\log(y(t)) + (1-e^{\lambda T})\log(A(0)) + (t+T-e^{\lambda T}t)\xi$$

Подставляя в (12’) выражение для равновесного значения $\log(\tilde{y}^*)$ получаем

$$\log(y(t+T)) - \log(y(t)) = (1-e^{\lambda T})\log(A(0)) + (t+T-e^{\lambda T}t)\xi + (e^{\lambda T}-1)\log(y(t)) +$$
$$+ (1-e^{\lambda T})\frac{\alpha_p}{1-\alpha_p-\alpha_h}\log(\tau_p) + (1-e^{\lambda T})\frac{\alpha_h}{1-\alpha_p-\alpha_h}\log(\tau_h) - (1-e^{\lambda T})\frac{\alpha_p+\alpha_h}{1-\alpha_p-\alpha_h}\log(\delta+\nu+\xi)$$

(26)

Другими словами рост зависит от некоторых экзогенно заданных констант, начального уровня *log(y(t))*, норм сбережения, технологических параметров и темпа прироста населения. Так как $\lambda < 0$ коэффициент при начальном уровне *log(y(t))* будет отрицательным

Сравнивая степень сходимости в модели *MRW* и в модели *SS*, обнаружим, что единственное различие – это добавление α_h в первой модели. Таким образом, при фиксированных α_p (коэффициенте для физического капитала), δ, ν и ξ, добавка в *MRW* параметра человеческого капитала к неоклассической модели подразумевает, что λ ближе к 0, или более медленный темп сходимости, чем в модели *SS*.

Как в модели *MRW*, так и в стандартной неоклассической модели уровень дохода сбалансированного роста временные траектории могут различаться от параметров предпочтения и технологии (θ, ρ, τ и α). Однако темп изменения для таких траекторий сбалансированного роста дохода всегда экзогенно задан и равен $\xi = \frac{\dot{A}}{A}$. Полезно помнить, когда мы работаем с соотношениями подобными (15), что хотя зависимая переменная в регрессионных уравнениях темп роста, эти модели не объясняют изменение темпа роста в долгосрочном периоде

Типичные эмпирические результаты тестирования *MRW* модели представлены в следующей Таблице 1. Данные взяты из работы Дюрлофа и Джонсона [68, табл. 2], обозначения изменены согласно изложенному выше. Символ “+” означает значимость на 5-% уровне. Ограниченная (*constrained*) регрессия подразумевает наложение следующего условия $\lambda = -(1-\alpha_p-\alpha_h)(\delta+\nu+\xi)$.

Таблица 1

Поперечная (*cross-section*) регрессия

	MRW	$y_j(1960) < 1950$ and $LR_j(1960) < 54\%$	$1950 < y_j(1960)$ and $54\% \leq LR_j(1960)$
Observations	98	42	42
		Unconstrained regressions	
$\log y_j(1960)$	$-0.29^\dagger$	$-0.44^\dagger$	$-0.43^\dagger$
	(0.06)	(0.16)	(0.08)
$\log(\delta + \nu_j + \xi)$	-0.50	-0.38	-0.54
	(0.29)	(0.47)	(0.28)
$\log \tau_{p,j}$	$0.52^\dagger$	$0.31^\dagger$	$0.69^\dagger$
	(0.09)	(0.11)	(0.17)
$\log \tau_{h,j}$	$0.23^\dagger$	$0.21^\dagger$	0.11
	(0.06)	(0.09)	(0.16)
$\bar{R}^2$	0.46	0.27	0.48
		Constrained regressions	
α_p	$0.43^\dagger$	$0.28^\dagger$	$0.51^\dagger$
α_h	$0.24^\dagger$	$0.22^\dagger$	0.11
$\bar{R}^2$	0.42	0.28	0.50

2.5 Эндогенный рост: асимптотически линейные технологии

Теперь рассмотрим класс моделей, которые генерируют долгосрочный рост, используя отличный от экзогенного, вид технического прогресса. В этих моделях мы ослабим условия на производственную функцию и рассмотрим виды производственных технологий, отличных от функции Кобба-Дугласа.

Предположим, как в стандартной неоклассической модели с единственным капитальным благом, (6а) и 18(а-г), но вместо (19), предположим, что

$$\forall \tilde{N}A > 0 : \lim_{K \to \infty} F(K, \tilde{N}A) / K > 0 \tag{27}$$

Например, рассмотрим производственную функцию, вида (1а) с постоянной эластичностью замещения (CES):

$$F(K, \tilde{N}A) = \left[\gamma_K K^\alpha + \gamma_N \left(\tilde{N}A\right)^\alpha\right]^{1/\alpha},$$

она однородна степени 1, выпуклая и удовлетворяет (13), (14) и (27)

$$\forall \tilde{N}A > 0 : \lim_{K \to \infty} F(K, \tilde{N}A) / K = \gamma_K^{1/\alpha} > 0$$

Назовем производственную функцию, удовлетворяющую (27) асимптотически линейной. Т.е. $f(\tilde{k})$ изменяется линейно, при стремлении $\tilde{k}$ к бесконечности. Используя правило Лопиталя из (27) следует

$$\lim_{\tilde{k}\to\infty} \nabla f(\tilde{k}) = \lim_{\tilde{k}\to\infty} f(\tilde{k})\tilde{k}^{-1} > 0 \Rightarrow \lim_{\tilde{k}\to\infty} s(\tilde{k}) = 1,$$

так что, равновесие при сбалансированном росте с положительным $\tilde{y}/\tilde{y}$ теперь возможно.

Пусть процесс накопления капитала, как и ранее, следует (20a). Принимая технологические параметры как фиксированные, определим пороговую норму сбережения

$$\underline{\tau} = \frac{\delta + \nu + \xi}{\lim\limits_{\tilde{k}\to\infty} f(\tilde{k})\tilde{k}^{-1}}$$

Числитель представляет собой темп, с которым технологически скорректированный физический капитал на единицу рабочей силы “распределяется” (*dissipates*) естественным образом при заданных дисконтной ставке, росте населения и коэффициенте экзогенного технологического развития. Знаменатель это предел среднего продукта (*limiting average product*), который равен пределу предельного продукта (*limiting marginal product*). Таким образом, это выражение отражает соотношение между двумя силами: чем более продуктивный физический капитал в пределе, тем ниже пороговая норма сбережения, в то же время, чем быстрее капитал естественно “распределяется”, тем выше пороговое значение. Если $\underline{\tau}$ равно 1, тогда при всех возможных нормах сбережения $\tau \in (0;1)$ система показывает то же самое поведение как в модели *SS*: рост *y* происходит в длительном периоде с темпом ξ. Однако, если $\underline{\tau}$ меньше 1, может получиться более интересная динамика. Когда в экономике величина τ меньше $\underline{\tau}$, результат вновь повторяет поведение *SS*.

Но, когда в экономике норма сбережения достаточно высока, т.е. $\tau \in (\underline{\tau},1)$, тогда $\tilde{k}/\tilde{k}$ всегда превосходит неизменную во времени положительную величину, и предельное поведение которой задается следующим выражением

$$\lim_{t\to\infty} \tilde{k}(t)/\tilde{k}(t) = \left(\lim_{\tilde{k}\to\infty} f(\tilde{k})\tilde{k}^{-1}\right)\tau - (\delta + \nu + \xi) > 0$$

Более того, такие траектории *(y,k)* движутся к равновесию сбалансированного роста, т.к.

$$\tilde{k}(t)/\tilde{k}(t)-\tilde{y}(t)/\tilde{y}(t)=\left[1-\frac{\nabla f(\tilde{k}(t))}{f(\tilde{k}(t))\tilde{k}(t)^{-1}}\right]\tilde{k}(t)/\tilde{k}(t)\to 0; t\to\infty$$

Тогда получаем темп долгосрочного роста

$$\tilde{y}(t)/\tilde{y}(t)=\xi+\left[\left(\lim_{\tilde{k}\to\infty} f(\tilde{k})\tilde{k}^{-1}\right)\tau-(\delta+\nu+\xi)\right]>\xi$$

он возрастает по τ, что означает, что экономика, сберегающая большую часть своего дохода, растет быстрее в длительном периоде. Именно этот эффект и позволяет отнести данную модель к классу эндогенных. Сравним результат со стандартной неоклассической моделью, где норма сбережения влияет только на уровень выборочной траектории сбалансированного роста, а не на темпы роста.

Это соотношение между сбережением и долгосрочным ростом применимо только к тем экономикам, где норма сбережения больше пороговой величины $\underline{\tau}$. Все экономики в которых норма сбережений ниже этой величины не могут влиять на долгосрочные темпы роста дохода, путем изменения своего поведения относительно сбережений (если только норма не превысит пороговую норму). Какие наблюдаемые результаты следуют из этого? Если бы нормы сбережений были равномерно распределены среди разных странам, тогда существовала бы группа государств, сконцентрированных около одного и того же низкого темпа роста подушевого дохода и другая группа с отличными темпами роста, возрастающими по мере возрастания нормы сбережения.

Как стандартная неоклассическая модель, эта асимптотически линейная технология может быть изложена в терминах общего равновесия. Вспомним предположение (9б) и предположим, что параметр предпочтений θ удовлетворяет условиям

$$\frac{\lim_{\tilde{k}\to\infty} f(\tilde{k})\tilde{k}^{-1}-(\rho+\delta)}{\xi}>\theta>\frac{\lim_{\tilde{k}\to\infty} f(\tilde{k})\tilde{k}^{-1}-(\rho+\delta)}{\rho-\nu}>0$$

(28)

Из (21) следует, что параметр θ – обратный к межвременной эластичности замещения. Таким образом (28) говорит о том, что эта эластичность не может быть ни очень высокой, ни очень низкой, она должна удовлетворять граничным условиям, зависящим от технологического параметра.

Из условия $\rho > \nu$ следует, что $\lim_{\tilde{k}\to\infty} f(\tilde{k})\tilde{k}^{-1} > \rho + \delta$. Чтобы интервал реальных значений θ существовал, необходимо, чтобы $\xi < \rho - \nu$. В итоге, эти соотношения подразумевают:

$$\lim_{\tilde{k}\to\infty} f(\tilde{k})\tilde{k}^{-1} > \delta + \nu + \xi,$$

что было использовано ранее, чтобы гарантировать $\underline{\tau} < 1$.

Можно показать, что из (28) следует, существование равновесия сбалансированного роста с положительным темпом роста, задаваемым следующей формулой

$$\lim_{t\to\infty} \dot{\tilde{y}}(t)/\tilde{y}(t) = \left(\lim_{\tilde{k}\to\infty} f(\tilde{k})\tilde{k}^{-1} - \left[\rho + \delta + \theta\xi\right]\right)\theta^{-1} > 0$$

и что для каждого начального $k(0)$ существует равновесие, сходящееся к сбалансированному росту. Однако, если значение θ очень велико, то единственное равновесие сбалансированного роста имеет $\lim_{t\to\infty} \dot{\tilde{y}}(t)/\tilde{y}(t) = 0$.

2.6 Эндогенный рост: внешние эффекты и накопление человеческого капитала

В работе Ромера [175], [140] разделяются производственные эффекты частного физического капитала и внешние эффекты (*externalities*) масштаба экономики, вызванные частным накоплением. Модель Ромера использует производственную функцию (6б) с аргументами в F отражающими действия частных агентов, в которой A зависит от $\bar{k}$, но $\bar{k}$ определяется как общественный или агрегированный фактор. Частные агенты игнорируют влияние своих действий на A; однако существует внешний эффект, влияющий на решения частных агентов относительно накопления физического капитала.

В той части модели Ромера, которая описывает действия частных агентов, A также входит экзогенно. Однако в равновесии, A зависит от целенаправленных действий экономических агентов, и таким образом должна рассматриваться как эндогенная величина. Оптимальные решения частных агентов относительно выбора уровней потребления и сбережения остаются идентичными стандартной неоклассической модели. В то же самое время равновесный агрегированный выпуск может демонстрировать действующий (*ongoing*) эндогенный рост, отличающийся от стандартной модели. В некоторых версиях модели Ромера существуют равновесия, стремящиеся к сбалансированному росту, в других существует рост, но без стремления к сбалансированному росту.

Рассмотрим модель с внешними эффектами (экстерналиями) подробнее [140]. Пусть у нас имеется стандартная классическая модель, в которой отсутствует экзогенный технический прогресс. Предположим, что производственная функция типичного частного агента имеет следующий вид:

$$y_t = f(k_t, \bar{k}_t), \quad f_2 > 0, f_{22} < 0 \tag{29}$$

где $\bar{k}_t$ – это усредненный капитальный актив на единицу рабочей силы, единый для всей экономики (*economy-wide average capital stock per person*). В основе этой идеи лежит тот факт, что знание носит характер общественного блага (*public good character of knowledge*). Предположим, что новый физический капитал и новые знания или открытия производятся в фиксированных пропорциях, так что $\bar{k}_t$ – это индекс не только агрегированного физического капитала, но и агрегированного запаса общественного знания, которое каждая фирма может тиражировать и использовать. Но так как каждый экономический агент мал по сравнению со всей экономикой, он рассматривает $\bar{k}_t$ как заданное, когда принимает решения относительно k_{t+1}.

Чтобы выявить эффекты, возникающие благодаря экстерналиям, предположим, что производственная функция имеет вид функции Кобба-Дугласа.

$$y_t = A k_t^{\alpha} \bar{k}_t^{\eta},$$

Типичный агент максимизирует межвременную функцию полезности $u(c_t, c_{t+1}, ...) = u(c_t) + \beta u(c_{t+1}) + ...$. Функция полезности имеет вид $u(c_t) = \log(c_t)$, весь капитал k_t амортизируется в периоде t, налоги, правительственные трансферты и правительственное потребление в данной модели отсутствует. Тогда бюджетное ограничение типичного агента можно записать в следующем виде:

$$A k_t^{\alpha} \bar{k}_t^{\eta} = c_t + (1+\nu) k_{t+1}$$

Условие экстремума первого порядка:

$$\frac{(1+\nu)}{c_t} = \frac{\beta \alpha A k_{t+1}^{\alpha-1} \bar{k}_{t+1}^{\eta}}{c_{t+1}}$$

К тому же для общего конкурентного равновесия должно выполняться следующее условие: $k_t = \bar{k}_t$, так как мы предположили, что все агенты одинаковы.

Используя эти соотношения, получаем выражение для k_{t+1}.

$$k_{t+1} = \alpha\beta(1+\nu)^{-1} A k_{t+1}^{\alpha+\eta} \qquad (30)$$

Отметим, что при $\eta > 0$ траектория конкурентного равновесия не является общественно оптимальной. Для общественно оптимального конкурентного равновесия:

$$k_{t+1} = (\alpha+\eta)\beta(1+\nu)^{-1} A k_t^{\alpha+\eta} .$$

(31)

Очевидно, что в случае $(\alpha+\eta) < 1$ из (30) следует, что k_t приближается к постоянной величине, но меньшей, чем равновесное значение в (31) – результат который отражает неспособность частных агентов учитывать последствия их собственных действий на общеэкономическое состояние знания. Если случится, что $(\alpha+\eta) = 1$, тогда k_t будет расти постоянно с темпом $\alpha\beta(1+\nu)^{-1} A - 1$. Таким образом, в данной модели, которая исключает экзогенный технический прогресс, существует возможность устойчивого роста, в этом случае, темп роста зависит от параметров α, β, ν и A.

Теперь рассмотрим ещё один механизм эндогенного роста, который касается накопления человеческого капитала. Под накопления человеческого капитала будем подразумевать, что квалификация рабочей силы может быть повышена за счет применения полезных ресурсов. Чтобы описать это явление, предположим, что накопление физического капитала происходит по следующему закону

$$A k_t^{\alpha} (h_t n_t)^{1-\alpha} = c_t + (1+\nu) k_{t+1} ,$$

(32)

где n_t – это доля времени типичного домохозяйства, которое тратится на производство продуктов и h_t – мера человеческого капитала или производственных навыков. Эти навыки приобретаются за счет накопления человеческого капитала в период времени (1– n_t). Для простоты предположим, что процесс повышения производственных навыков подчиняется следующему уравнению:

$$h_t - h_{t-1} = B(1-n_t) h_t - \delta_h h_t ,$$

(33)

где последний член описывает феномен обесценения человеческого капитала во времени. Здесь и далее в этой модели примем темп роста населения ν равно нулю.

Максимизация функции полезности с учетом ограничений приводит к следующим условиям первого порядка:

$$c_t^{-1} = \beta c_{t+1}^{-1} \alpha A k_{t+1}^{\alpha-1} (h_{t+1} n_{t+1})^{1-\alpha} \tag{34}$$

$$c_t^{-1} A k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha} (1-\alpha) n_t^{-\alpha} = \mu_t B h_t \tag{35}$$

$$\mu_t = \beta \mu_{t+1} [B(1-n_{t+1}) + 1 - \delta_h] + \beta c_{t+1}^{-1} A k_{t+1}^{\alpha} n_{t+1}^{1-\alpha} (1-\alpha) h_{t+1}^{-\alpha} \tag{36}$$

Здесь μ_t – это “теневая” цена (*shadow price*) человеческого капитал, т.е. множитель Лагранжа, соответствующий второму ограничению. Правительственные трансферты и налоги в модели отсутствуют, т.о. конкурентное равновесие задается пятью уравнениями, которые определяют временные траектории для c_t, k_t, h_t, n_t и μ_t.

Рассмотрим возможность устойчивого равномерного роста в данной системе. Так как n_t ограничена интервалом [0;1], эта величина должна быть константой $n_t = n$ в любом устойчивом состоянии. Из (33) следует, что h_t будет расти с равномерным темпом $B(1–n)–\delta_h = \xi$. Тогда из (34) можно показать, что, так как отношение c_{t+1} / c_t должно быть постоянным, то c_t и k_t также растут с темпом ξ. После некоторых преобразований получим, что

$$n = \frac{\rho(1+B-\delta_h)}{(1+\rho)B} \tag{37}$$

$$\xi = B(1-n) - \delta_n \tag{38}$$

Важным свойством выражения (27) является то, что равновесное значение темпов роста ξ убывает по ρ – степени межвременных предпочтений. Другими словами, чем большее нетерпение демонстрируют экономические агенты, тем ниже будет темп равновесного роста. Такой результат является достаточно правдоподобным, однако он не получается при использовании неоклассической модели.

Чтобы включить в уравнение накопления человеческого капитала физический капитал, Ребело [173] предложил следующую формулу:

$$h_t - h_{t-1} = B(m_t k_t)^a [(1-n_t) h_t]^{1-a} - \delta_h h_t,$$

(39)

где m_t – это доля запасов физического капитала, которая затрачивается на производство человеческого капитала, при этом в (32) следует заменить k_t на $(1\text{-}m_t)k_t$. Ребело обнаружил, что при таком условии получаются те же самые выводы, что и в более простой модели. Более того, если производство физических продуктов облагается налогом (по ставке τ), тогда темп равновесного роста будет убывать по τ.

Из двух рассмотренных выше механизмов роста: внешних эффектов, связанных с общеэкономическим (*economic–wide*) знанием и процессами накопления человеческого капитала не очевидно, какой из них более наиболее приемлем как источник основных количественных отклонений от неоклассической модели. Однако нет причины рассматривать эти механизмы на основе "или-или", они оба одновременно могут иметь отношение к экономическому росту. В самом деле, в модели Лукаса (1988) учитываются как накопление человеческого капитала, так и внешний эффект (экстерналия), учитывающий средний по экономике человеческий капитал.

Найдем полное (период за периодом) решение для модели эндогенного роста. Вывести такое решение в модели Лукаса представляется возможным, если человеческий капитал полностью обесценивается за один период. В соответствии с этим изменим уравнения (32)–(36), используя в качестве производственной функции выражение $Ak_t^{\alpha}(h_t n_t)^{1-\alpha}\bar{h}_t^{\eta}$ и установив $\delta_h = 1$. Также предположим опять рост населения $\nu \neq 0$. Тогда получим следующие условия оптимальности для типичного домохозяйства.

$$Ak_t^{\alpha}(h_t n_t)^{1-\alpha}\bar{h}_t^{\eta} = c_t + (1+\nu)k_{t+1} \qquad (40а)$$

$$(1+\nu)h_{t+1} = B(1-n_t)h_t \qquad (40б)$$

$$(1+\nu)c_{t+1} = c_t\beta\alpha Ak_{t+1}^{\alpha-1}(h_{t+1}n_{t+1})^{1-\alpha}\bar{h}_{t+1}^{\eta}$$

$$c_t^{-1}Ak_t^{\alpha}h_t^{1-\alpha}(1-\alpha)n_t^{-\alpha}\bar{h}_t^{\eta} = \mu_t Bh_t \qquad (40в)$$

$$(1+\nu)\mu_t = \beta\mu_{t+1}[B-(1-n_t)] + \beta c_{t+1}^{-1}Ak_{t+1}^{\alpha}n_{t+1}^{1-\alpha}(1-\alpha)h_{t+1}^{-\alpha}\bar{h}_{t+1}^{\eta} \qquad (40г)$$

Конкурентное равновесие наблюдается в случае $h_t = \bar{h}_t$. Чтобы решить эту систему для c_t, k_{t+1}, h_{t+1}, n_t и μ_t, предположим, что эти пять неизвестных переменных зависят от двух фазовых переменных k_t, h_t следующим образом:

$$c_t = \phi_{10} k_t^{\phi_{11}} h_t^{\phi_{12}}$$
$$k_{t+1} = \phi_{20} k_t^{\phi_{21}} h_t^{\phi_{22}} \qquad (41а)$$
$$h_{t+1} = \phi_{30} k_t^{\phi_{31}} h_t^{\phi_{32}} \qquad (41б)$$
$$n_t = \phi_{40} k_t^{\phi_{41}} h_t^{\phi_{42}} \qquad (41в)$$
$$\mu_t = \phi_{50} k_t^{\phi_{51}} h_t^{\phi_{52}} \qquad (41г)$$

Начнем с подстановки (41в) и (41г) в (40б), в итоге получим

$$(1+\nu)\phi_{30} k_t^{\phi_{31}} h_t^{\phi_{32}} = Bh_t - B\phi_{40} k_t^{\phi_{41}} h_t^{\phi_{42}} h_t$$

Но тогда, чтобы (41) выполнялось при всех значениях k_t, h_t необходимо, чтобы $\phi_{31} = \phi_{41} = \phi_{42} = 0$ и $\phi_{32} = 1$. Продолжив рассуждения аналогичным образом, можно сделать вывод, что h_t равномерно возрастает с темпом $[B\beta/(1+\nu)]-1$. Норма сбережения физического выпуска равна □ □, и k_t изменяется по следующему закону:

$$k_t = \frac{\alpha B(1-\beta)^{1-\alpha}}{1+\nu} A k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha+\eta} \ .$$

Интересный и важный результат получается, если мы откажемся от внешних эффектов, т.е. положим h = 0, но предположим, что производственная функция человеческого капитала имеет вид (39) но с a = □, т.е. равным принадлежащему производству потребляемого выпуска. С логарифмической полезностью и производственной функцией Кобба-Дугласа, m_t и n_t будут постоянными во времени, также производственная функция будет той же самой и относительная цена единицы человеческого капитала в терминах выпуска будет равной 1. Таким образом, сумма выпусков будет $k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha} = k_t (h_t / k_t)^{1-\alpha}$, но в этом специальном случае h_t/k_t = const, что влечет $y_t = Ak_t$. Это случай так называемой "*AK*"–модели, которая с точки зрения перспектив роста похожа на предельный частный случай неоклассической модели, в которой параметр эластичности капитала □ равен 1. В этом случае k_t и, таким образом, выпуск на душ населения растет без предела с постоянным темпом даже при отсутствии технического прогресса. Более того, даже при а □ □, так что отношение h_t/k_t изменяется от периода к периоду, модель работает как указано выше, с точки зрения перспективы устойчивого роста.

2.7 Невыпуклость производственной функции и ловушки бедности

Еще один класс моделей обращает особое внимание на определенные невыпуклости (*nonconvexity*) агрегированной производственной функции. В этих исследованиях проанализировано влияние таких невыпуклостей на соотношения между начальными условиями и устойчивыми состояниями динамики агрегированного выпуска. Модели с невыпуклостями, в отличие от неоклассических моделей позволяют выявить долгосрочные зависимости в параметрах временных рядов, описывающих поведение агрегированного выпуска. Например, в невыпуклых моделях могут появляться такие феномены, как ловушки бедности (*poverty traps*), когда экономики с низким уровнем начальных доходов или капитальных запасов сходятся к одному устойчивому уровню подушевого выпуска, в то время как экономики с высоким уровнем начальных доходов или капитальных запасов сходятся к другому устойчивому уровню.

В качестве примеров таких моделей можно привести, например, работы Дюрлофа (*Durlauf* [66]) и ряда других исследователей [86, 149]. Модель Азариадиса и Дразена (*Azariadis and Drazen* [10]) (*AD*) особенно удобна для иллюстрирования эмпирических различий между этим подходом и стандартной неоклассической моделью. Модель *AD* вводит понятия пороговых значений в накоплении человеческого и физического капитала. Эти особенности происходят от “переливов” (*spillovers*) индивидуальных инвестиций, возникающих, когда агрегированный капитал достаточно велик. В итоге экономики с недостаточным агрегированным капиталом имеют производственные функции отличные по сравнению с теми, которые имеют достаточно высокий уровень капитала.

Представим основные идеи подхода *AD* в рамках изложенной выше общей модели. Изменим *MRW* технологию следующим образом.

$$\tilde{y}(t) = \tilde{k}_p(t)^{\alpha_p(t)}\tilde{k}_h(t)^{\alpha_h(t)}$$

$$\alpha_p(t) = \begin{cases} \alpha_p, \tilde{k}_p(t) > \kappa_p(t) \\ \underline{\alpha}_p \end{cases}$$

$$\alpha_h(t) = \begin{cases} \alpha_h, \tilde{k}_h(t) > \kappa_h(t) \\ \underline{\alpha}_h \end{cases}$$

(42)

где *(t)* обозначает переменные, изменяющиеся во времени и коэффициенты $\alpha_p(t)$ и $\alpha_h(t)$ изменяются в зависимости от состояния $(\tilde{k}_p, \tilde{k}_h)$. Количества $\kappa_p(t)$ и $\kappa_h(t)$ означают пороговые значения для физического и человеческого капитала соответственно. Они предполагаются зависящими от времени *t*, для того чтобы обеспечить возможность изменения во времени агрегированной производственной функции.

Из-за невыпуклостей, связанных с этими пороговыми эффектами, в модели могут существовать множественные устойчивые равновесия, зависящие от динамики $\kappa_p(t)$ и $\kappa_h(t)$. Например, когда значение $\tilde{k}_p(t)$ мало, в (42) работает ветвь $\underline{\alpha}_p$, которая в свою очередь может заключать в себе (низкое) устойчивое равновесие $\tilde{k}^*_{p1}(t)$. Однако, когда значение $\tilde{k}_p(t)$ велико, тогда активна ветвь $\overline{\alpha}_p(t)$, так что другая (высокая) величина $\tilde{k}^*_{p2}(t)$ теперь может также быть устойчивым равновесием.

Это описание отражает важный общий принцип. Когда агрегированная производственная функция включает пороговые эффекты, линейная поперечная зависимость роста (*linear cross-section growth relationship*) от начального уровня капитала ранее изученного вида не будет существовать. Даже если через фиксированный период времени никакая экономическая система не перейдет через капитальные пороги, каждая экономика с производственной функцией (42) будет следовать одному из четырех четких законов движения *SS*, зависящих от совокупности величин $\tilde{k}_p, \tilde{k}_h$, $\kappa_p(t)$ и $\kappa_h(t)$. Таким образом, существует четыре типа классов экономик с динамикой *SS*, отличающейся для каждого класса.

При этих предположениях закон движения для экономики *j* отличается от (26) тем, что α_p, α_h, и, таким образом, λ зависят от времени и состояния.

$$\log(y_j(t+T)) - \log(y_j(t)) = T\xi + (1-e^{\lambda_j T})[\log(A_j(0)+t\xi) + \frac{(1-e^{\lambda_j T})}{1-\lambda_p-\lambda_h}[\alpha_{p,j}\tau_{p,j} + \alpha_{h,j}\tau_{h,j} -$$

$$-(\alpha_{p,j}+\alpha_{h,j})\log(\delta+\nu_j+\xi)] - (1-e^{\lambda_j T})\log(y_j(t)) \quad (43)$$

Дюрлоф и Джонсон (*Durlauf and Johnson* [68]) изучали регрессию (43) и обнаружили свидетельство существования множественных режимов при анализе “среза поперечных ” данных (*cross-country*) для разных стран. Они заключили, что начальные условия играют важную роль, и что *MRW*–расширение неоклассической модели не может успешно объяснить различия в наблюдаемых темпах роста в разных странах. Динамика, близкая изученной Дюрлофом и Джонсоном в уравнении (43), изучалась в работах [86, 169]. Описанный в них закон движения подразумевает "поляризационный" эффект, а именно, различные экономики движутся по направлению к одному из нескольких устойчивых состояний [75]. Вне зависимости от интерпретации, наблюдаемые результаты те же самые. Богатые в начальном периоде экономики сходятся к более высокому устойчивому состоянию, бедные – к более низкому устойчивому уровню.

2.8 Эндогенный рост: R&D и эндогенный технический прогресс

Третий класс моделей эндогенного роста касается не рассматривавшихся до этого особенностей производственной функции (6а,б). Выше уже описывалась модель Ромера с внешними эффектами, влияющими на накопление. Напомним, что в соотношении (6б) считается, что величина A зависит от некоторого накопленного уровня капитальных инвестиций масштаба экономики. В то время как A – непосредственная причина роста – входит в модель эндогенно, это не является следствием обдуманных действий всех экономических агентов. Один из классов моделей эндогенного роста предполагает, что A непосредственно зависит от результатов такого выбора. Ниже рассмотрим, каковы в таком случае будут эмпирические выводы.

Различаясь в некоторых деталях, модели Агиона и Хоуита (*Aghion and Howitt* [4]), Гроссмана и Хэлпмана (*Grossman and Helpman* [94]), Джонса [105], Ромера [176] все связывают изменение A с вкладом таких поддающихся измерению величин как расходы на R&D, число ученых и инженеров и т.д. Напротив, модели, подобные модели Лукаса (*Lucas* [133, 134]) делают акцент на улучшении H – человеческом капитале, воплощенном в рабочей силе, как источнике эндогенного роста. Когда производственная функция описывается уравнением вида (6а), результирующая динамика в измеряемом подушевом доходе будет неотличима для улучшений A или H.

Эмпирический подход, предполагаемый в таких моделях уделяет особое внимание переменным, которые отражают эффект и затраты на исследовательскую деятельность. Джонс [106] отмечал, что в США не наблюдалось ни постоянных изменений в темпах роста ни в трендовых уровнях траекторий подушевого ВВП с 1880. Хотя ресурсы, направляемые на R&D коренным образом выросли за последние полвека. Таким образом, исходя из анализа Джонса, базирующиеся на R&D модели роста (или, в самом деле, все модели роста с “эффектом масштаба”) противоречили эмпирическим свидетельствам. Более подробно критика Джонса будет рассмотрена ниже.

Отметим, что такое заключение может быть оспорено в свете результатов других исследований [162]. Например, работа Нельсона и Плоссера (*Nelson and Plosser* [157]), посвящена анализу единичных корней. В этой работе показано, что на различных временных интервалах свойства временных рядов, описывающих изменение дохода, демонстрируют постоянные изменения. Мы не предполагаем здесь, что эмпирические исследования неоспоримо свидетельствуют в пользу той или иной гипотезы, а просто указываем на то, что требуется внимание при анализе этих временных рядов. Кроме того, следует указать работы, например, Бен-Дэвида (*Ben-David* [26]), где постоянное увеличение темпов роста и изменение уровней трендовых траекторий – по временной выборки сравнимой с выборкой в работе Джонса – в самом деле наблюдалось у широкого круга стран, отличных от США.

Ко и Хэлпман (*Coe and Helpman* [28]) исследовали зависимость уровня A в стране от внутреннего и внешнего R&D капитала. Они соотносили их оценки таких межстрановых “переливов” с открытостью экономики. В результате исследования обнаружился двойной эффект: во-первых, благотворные межстрановые R&D “переливы” тем сильнее, чем более открыта экономика. В частности, среди стран G7 до одной четверти общих R&D инвестиций может быть отнесено на счет торговых партнеров. Во-вторых, измеренное влияние как внутренних и внешних инвестиций в R&D на A велико. Ко и Хэлпман проводили свой анализ целиком в терминах продуктивности и уровней дохода.

Расширенная модель Шумпетера эндогенного роста, подчеркивающая вклад сектора R&D в экономический рост будет рассмотрена ниже.

2.9 Рост с взаимодействием между странами

Лукас [134] представил модель роста эмпирические следствия которой заметно отличаются от рассмотренных ранее. В модели показано, что при рассмотрении различных типов взаимозависимостей между странами – в данном случае “преливов” человеческого капитала – изменяются выводы о типе роста, даже если используется фиксированная стандартная производственная функция.

Предположим, что в модели (6) A и N постоянны и равны 1, но существует параметр интенсивности рабочей силы (*work effort*) $w \in [0,1]$, так что

$$Y = F(K, wH) \Rightarrow y = F(k, wH),$$

где F удовлетворяет предположениям (13), (14) и (19) модели *SS*. Чем напряженнее трудится рабочая сила, тем больше значение w, и, таким образом, при заданной величине затрат человеческого капитала H производится больший выпуск.

Предположим, что капитал не обесценивается и предположим, что сбережения подчиняются тому же закону, что и в модели *SS*:

$$\dot{k} = \tau y$$

(44)

Пусть

$$\dot{H} / H = G(w),\ G(w) > 0 \text{ для } w > 0,$$

(45)

т.е. насколько быстро происходит накопление человеческого капитала в зависимости от w. Если в экономике существует обучение в процессе работы (*learning by doing*), то $G' > 0$, с другой стороны, наличие эффектов получения образования (*schooling effect*) и отдыха (*resting effects*) приводят к $G' < 0$.

Равновесие сбалансированного роста – это конфигурация временных траекторий (y,k,H,w), удовлетворяющих (44) и (45), таких, что

$$\dot{y} / y = \dot{k} / k = \dot{H} / H \text{ и } w = \overline{w} = \text{const}$$

Так как w изменяется в ограниченном интервале, естественно принять её константой при сбалансированном росте. Далее, предполагая идентичные предпочтения среди всех экономик, можно сделать вывод, что во всех странах существует общий постоянный уровень интенсивности $\overline{w}$. Теория, описывающая различие темпов роста у разных стран, может быть получена, если предположить, что w разный в разных экономиках.

Из (44) при сбалансированном росте получаем:

$$\frac{\dot{k}}{k} = \tau f\,(k / wH)(k / wH)^{-1},$$

затем, вычитая $\dot{H} / H = G(w)$ из обеих частей уравнения, получаем:

$$\frac{\dot{k}}{k} - \frac{\dot{H}}{H} = \tau f\,(k / wH)(k / wH)^{-1} - G(w)\,.$$

Таким образом, можно видеть, что также как и в модели *SS* равновесие сбалансированного роста существует, единственно и глобально стабильно. Существенное различие между двумя моделями в том, что член

$$H(t) = H(0)e^{G(w)t}$$

в модели со взаимодействием замещает член *A(t)*, отвечающий за неоклассический технический прогресс. Так как отношение *k/H* постоянно в экономике при сбалансированном росте, доходы на душу населения в разных экономиках развиваются по параллельным траекториям. Эти уровни подушевого дохода определяются начальным уровнем человеческого капитала *H(0)*. Как и ранее, для заданной экономики, подушевой доход стремится к траектории сбалансированного роста. Однако, эти траектории различаются в разных странах (если, конечно, они не одинаковые во всех отношениях, включая начальные условия).

Теперь предположим, что существуют межстрановые “переливы” в накоплении человеческого капитала. Обозначим среднемировой запас человеческого капитала как **H**, предположим, что каждая экономика мала, по сравнению с мировой. (45) изменится следующим образом:

для экономики j: $\dot{H}_j = G(w)H_j^{1-\pi}\mathbf{H}^{\pi}$, $\pi \in [0,1]$

Параметр π характеризует силу межстрановых “переливов” человеческого капитала. Чем больше этот параметр, тем больше человеческий капитал в *j*-ой экономике развивается в ногу со среднемировым. Из (45) следует, что

$$\dot{H}_j / H_j - G(w) = [(\mathbf{H} / H_j)^{\pi} - 1]G(w)\,.$$

Таким образом, когда H_j превышает среднемировой уровень, тогда рост человеческого капитала в j-ой экономике замедляется и становится ниже $G(w)$. С другой стороны, если H_j ниже, чем $\mathbf{H}$, то темпы роста человеческого капитала превосходят $G(w)$. Применяя это к сбалансированному росту, когда $w = \bar{w}$, и вспоминая, что каждая отдельно взятая экономика j мала по сравнению с мировой, можно показать, что отношение $\mathbf{H}/H_j$ глобально устойчиво в точке 1 и таким образом $H_j = \mathbf{H}$ для всех j.

Какие основные эмпирические следствия можно вынести из этой модели? Существует ли сходимость к общему уровню подушевого выпуска во всех экономиках – здесь зависит не только от формы производственной функции, но и от учета взаимодействий между странами. Концентрируется ли поперечное распределение около единственного значения, зависит от природы этих взаимодействий. Легко заметить, что если мы позволим экономикам образовывать группы (клубы), так что внутри каждой группы происходит более тесное взаимодействие, чем между группами (клубами), тогда среднее **H**, к которому они будут сходиться, окажется разным для разных групп. В зависимости от других предположений можно сконструировать модели, где сходимость будет иметь тип динамики сходимости клуба (convergence-club dynamics) [171]. Отметим, что выводы, сделанные на основе этих моделей, хорошо согласуются с эмпирическими фактами.

2.10 Критика моделей эндогенного роста

Существует класс работ, в которых ставится под сомнение эндогенная теория роста. Например, Мэнкью, Ромер and Вейль [136] показали, что неоклассическая модель роста *SS* (рассмотренная ранее) с экзогенным технологическим прогрессом и убывающей доходностью капитала объясняет большую часть изменений в подушевом выпуске среди разных стран (*cross country variation in output per person*). Многие авторы приводят расчеты, демонстрирующие, что разные экономики стремятся к параллельным траекториям роста, как предсказывается в модели *SS* с общим мировым уровнем технологии. “Шумпетеровский” (*Schumpeterian*) вариант теории эндогенного роста, подчеркивающий роль технического прогресса, инноваций и R&D подвергался значительной критике. В работах Юнга (*Young*) [195, 196] показано, что технический прогресс – менее важный источник экономического роста по сравнению с накоплением капитала. Как уже указывалось ранее, Джонс [105] показал, что вложения в R&D, сильно возросшие в послевоенный период, не сопровождались аналогичным изменением темпов роста производительности. Этот результат позволяет отвергнуть теорию роста Шумпетера и подтвердить альтернативную, в которой долгосрочный рост определяется исключительно темпом роста населения.

Рассмотрим основные работы, в которых ставится под сомнение шумпетеровский подход к теории роста.

2.11 Декомпозиция роста

С начала 60-х годов некоторые восточно-азиатские страны продемонстрировали беспрецедентные темпы роста, в особенности четыре “дракона”: Гонконг, Сингапур, Южная Корея и Тайвань. Вклад, сделанный в этот рост повышением общей производительности факторов (*Total Factor Productivity*) исследовался Юнгом в работах [195, 196]. Юнг изучал составляющие роста (*growth accounting*), и показал, что большая часть экономического роста стран Восточной Азии может быть объяснена накоплением капитала, ростом человеческого капитала и возросшей долей вовлеченности рабочей силы (*labor force participation*). Юнг обнаружил, что роль, которую играет общая производительность факторов, мала. Приведем некоторые цифры. В Гонконге ВВП на душу населения рос на 5.7% в год за период 1966-92. В 1966-90 гг. в Сингапуре этот показатель составил 6.8% в год, в Южной Корее также 6.8% и на Тайване 6.7%. Рост ВВП на рабочего составил величину на 1-2 процентных пункта ниже, отражая возраставшую степень вовлеченности рабочей силы. С такими простыми поправками темпы роста несколько снижаются, но все еще остаются очень высокими по стандартам других развивающихся стран. Юнг использовал *транслогарифмическую агрегированную производственную функцию*, чтобы отделить вложения в этот рост накопление факторов и увеличение общей производительности факторов:

$$Y = \exp(\alpha_0 + \alpha_K \log(K) + \alpha_L \log(L) + \alpha_t t + \frac{1}{2} B_{KK} (\log(K))^2 + B_{KL} (\log(K))(\log(L)) + B_{Kt} \log(K) t +$$

$$+ \frac{1}{2} B_{LL} (\log(L))^2 + B_{Lt} \log(L) t + \frac{1}{2} B_{tt} t^2).$$

Предполагая постоянную отдачу от масштаба, параметры α_j и B_{jk} должны подчиняться соотношению:

$$\alpha_K + \alpha_L = 1 \qquad B_{KK} + B_{KL} = B_{LL} + B_{KL} = B_{Kt} + B_{Lt} = 0$$

Взяв первую производную логарифма производственной функции, можно вывести формулу, позволяющую оценить вклад различных факторов в экономический рост:

$$\log\left(\frac{Y(t)}{Y(t-1)}\right) = \bar{\theta}_K \log\left(\frac{K(T)}{K(T-1)}\right) + \bar{\theta}_L \log\left(\frac{L(T)}{L(T-1)}\right) + TPF_{T-1,T}\,.$$

Особое внимание в работе уделялось вкладу труда. Для оценок изменений объема рабочей силы, включая улучшение образовательного уровня рабочих, использовались данные переписей и обследований. Сделав все необходимые поправки Юнг вывел оценки вклада, обусловленного ростом общей производительности факторов (остаток Солоу). Для того же самого временного периода, он обнаружил, что темп роста общей производительности факторов составил 2.3% в Гонконге, 0.2% в Сингапуре, 1.7% в Южной Корее и 2.1% на Тайване. Юнг указал, что эти цифры не являлись необычными даже по меркам развитых стран. Тот факт, что большая часть экономического роста стран Восточной Азии может быть отнесена за счет накопления факторов, в свою очередь, подразумевает, что технический прогресс вносит в экономический рост относительно несущественный вклад.

2.12 Эффекты масштаба и критика Джонса

В своих влиятельных работах [105, 106] Джонс указывает на то, что в странах OECD происходят постоянные изменения политики: либерализация торговли, увеличение продолжительности школьного обучения, повышение уровня инвестиций и, что особенно важно для шумпетеровского подхода, существенное возрастание уровня R&D – то, что должно было бы привести к повышению темпов роста. Однако существенного ускорения темпов роста не наблюдается. Это очевидное постоянство долгосрочного роста при наличии структурных изменений ставит под сомнение весь подход Шумпеттера. Джонс использовал полученные им данные, чтобы поддержать общую критику моделей роста, основанных на R&D, которую будет изложена ниже.

Рассмотрим следующую сокращенную форму модели экономического роста Ромера, включающую эндогенный технический прогресс. Агрегированный конечный выпуск равен:

$$Y = K^{\alpha}(AL_1)^{1-\alpha},$$

и темп роста технических знаний A пропорционален текущему потоку рабочей силы, включенной в научно-технические исследования L_2:

$$\frac{\dot{A}}{A} = \zeta L_2 .$$

Общее предложение труда постоянно и может свободно перераспределяться между исследованиями и производством:

$$L=L_1+L_2.$$

В устойчивом состоянии темп роста конечного выпуска должен быть пропорционален равновесной доле s^* общего объема рабочей силы, занятой в R&D:

$$g_Y = g_A = \zeta L_2 = \zeta s^* L.$$

Однако в то время как $L_2 = s^*L$ существенно возросло с 1950-х во всех странах OECD общий промышленный рост не демонстрировал систематического повышательного тренда. Джонс предположил, что это свидетельствует об уменьшающейся доходности в производстве новых знаний, вероятно из-за того, что при увеличении объёма уже накопленных знаний становится труднее их расширять. Чтобы описать упомянутый феномен Джонс предложил изменить уравнение следующим образом:

$$\frac{\dot{A}}{A} = \zeta L_2^{\gamma} A^{\psi-1}$$

где $\psi < 1$ и $\gamma \le 1$. Но тогда легко показать, что темп долгосрочного роста становится пропорциональным темпам роста населения, а именно:

$$g = \frac{\lambda \nu}{1-\psi} .$$

Можно сделать вывод, что убывающая отдача в производстве инноваций свидетельствует о том, что долгосрочный рост не подвергается влиянию структурных параметров, отличных от используемых в экзогенных моделях – темпа роста рабочей силы и производительности исследовательского сектора при разработке новых знаний. Таким образом, аргументы, изложенные в работе Джонса, приводят нас назад к выводам из классической модели Солоу, в которой долгосрочный рост не зависит от структурных изменений в экономике и политике.

2.13 Дополненная модель Шумпетера

В заключение приведем модель эндогенного роста [3], которая учитывает критику “классиков” и при помощи которой можно объяснить некоторые наблюдаемые феномены, которые невозможно объяснить с точки зрения неоклассических моделей роста.

Рассмотрим следующий вариант модели Шумпетера с накоплением капитала. Чтобы учесть “эффект масштаба” шумпетеровских моделей, при котором более населенная экономика будет расти быстрее, предположим, что вместе с ростом населения растет число продуктов в секторе инноваций. Более формально: есть единственный конечный выпуск, произведенный при помощи труда и множества промежуточных продуктов, т.е. производственная функция в данной модели имеет вид:

$$Y_t = Q_t^{\alpha-1}\left(\int_0^{Q_t} A_{it} x_{it}^{\alpha} di\right) L_t^{1-\alpha}, \tag{46}$$

где Y_t общий выпуск на дату t, Q_t – это мера того, сколько различных промежуточных продуктов существует в момент t, $L_t = \exp(g_L t)$ – затраты труда, g_L – экзогенный темп роста населения, x_{it} – выпуск промежуточного продукта i и A_{it} – производственный параметр, соответствующий промежуточному продукту i.

Присутствие сомножителя $Q_t^{\alpha-1}$ исключает выигрыш в производительности за счет разрастания количества продуктов. Такая особенность противопоставляет описываемую модель другим моделям, в частности модели Ромера, которые изображают возрастающее разнообразие продуктов как главный источник роста.

Число продуктов растет в модели, но только как результат копирования (*imitation*), а не хорошо обдуманных инноваций. При каждом копировании производится новый продукт, производственный параметр которого равен аналогичному показателю для случайно выбранного существующего продукта. Каждый агент в экономике имеет одну и ту же экзогенно заданную склонность к копированию. Отсюда, изменение количества скопированных продуктов может быть записано в виде $\dot{Q}_t = \xi L_t$, $\xi > 0$. Следовательно, наблюдается сходимость числа рабочих на единицу продукта к постоянной $l = g_L / \xi$. Для облегчения дальнейшего анализа, предположим, что сходимость уже произошла, когда мы начинаем наш анализ, так что $L_t = lQ_t$, для всех t.

Конечный выпуск может быть использован на потребление, сбережение или как ресурс для инновационного сектора. Каждый промежуточный продукт производится только за счет затрат капитала в соответствии с производственной функцией:

$$x_{it} = \frac{K_{it}}{A_{it}}.$$

Инновации рассматриваются как специальный промежуточный продукт. Каждая инновация создает улучшенный вариант существующего продукта, что позволяет изобретателю стать монополистом до тех пор, пока не произойдет следующая инновация. Функция издержек монополиста равна $\zeta_t K_{it} = \zeta_t A_{it} x_{it}$, где ζ_t – стоимость капитала и цена задается предельным продуктом $p_{it} = \alpha A_{it} x_{it}^{\alpha-1} l^{1-\alpha}$. Стандартная максимизация полезности дает условие, что все промежуточные секторы будут производить одно и то же количество, а именно:

$$x_{it} = x_t \equiv l(\zeta_t / \alpha^2)^{1/(\alpha-1)},$$

и каждый локальный монополист зарабатывает прибыль, пропорциональную производственному параметру:

$$\pi_{it} = A_{it}\pi_t \equiv A_{it}\alpha(1-\alpha)l^{1-\alpha}x_t^{\alpha}.$$

Предположим, что стоимость капитала всегда выбирается таким образом, что поддерживается баланс между спросом и предложением капитала, т.е.:

$$K_t = \int_0^{Q_t} K_{it}di = x_t \int_0^{Q_t} A_{it}di = x_t Q_t A_t.$$

Тогда общий выпуск всех промежуточных товаров будет:

$$x_{it} = x_t = \frac{K_t}{A_t Q_t} = k_t l$$

(47)

Подставляя (36) в (35) получаем производственную функцию Кобба-Дугласа:

$$Y_t = K_t^{\alpha}(A_t L_t)^{1-\alpha} = A_t L_t f(k_t), \quad \text{где } f(k_t) \equiv k_t^{\alpha}.$$

Улучшение в производственных параметрах происходит только из инноваций, которые используют конечный выпуск как единственный фактор производства. Процесс генерации инноваций в этом секторе описывается формулой Пуассона с параметром ϕ_t, R_t – количество единиц конечного выпуска, направленных в R&D:

$$\phi_t = \lambda\phi(R_t / A_t^{\max}) = \lambda\phi(n_t); \quad \lambda < 0, \phi' > 0, \phi'' < 0, \phi(0) = 0.$$

(48)

Уровень затрат на исследования будет определяться следующим условием отсутствия арбитража: затраты на дополнительную единицу выпуска, направленную в R&D, должны быть равны предельной ожидаемой выгоде:

$$1 - \beta_n = \lambda \frac{\phi(n_t)}{n_t} \upsilon_t,$$

где β_n – доля субсидий, покрывающих затраты на исследовательские проекты и υ_t – скорректированный на производительность объём инноваций.

В результате темп технического прогресса в данной модели определяется следующей формулой:

$$g_t = \frac{\dot{A}_t^{\max}}{A_t^{\max}} = \sigma\lambda\phi(n_t).$$

Темп роста реального выпуска на душу населения состоит из темпа роста выпуска на эффективную единицу рабочей силы и темпа технического прогресса.

$$G_t = \alpha \frac{\dot{k}_t}{k_t} + g_t$$

Запишем уравнения динамики для рассматриваемой модели:

$$\begin{aligned}
\dot{k}_t &= f(k_t) - c_t - n_t \frac{1+\sigma}{l} - [\delta + \nu + \sigma\lambda\phi(n_t)]k_t \\
\dot{n}_t &= \eta(n_t)\left[\left(\alpha f'(k_t) - \delta + \beta_k + \lambda\phi(n_t)\right)n_t - \lambda(1-\beta)^{-1}\phi(n_t)\pi(k_t)l\right] \\
\dot{c}_t &= c_t\left[\left(\alpha f'(k_t) - \delta + \beta_k - \rho\right)/\varepsilon - \sigma\lambda\phi(n_t)\right]
\end{aligned}$$

Первое и второе уравнения в этой системе напоминают соотношения в модели Касса-Купманса-Рамсея для оптимального роста, модифицированной для случая трудодополняющего технического прогресса. Единственное различие состоит в том, что теперь темп технического прогресса больше не экзогенная константа, а зависит от интенсивности исследовательской деятельности n_t.

Точка покоя системы (k^*, n^*, c^*)– это устойчивое равновесие со сбалансированным ростом. Эта точка покоя локально устойчива, т.е. для любого начального значения k_t вблизи k^* существует единственная пара начальных значений c и n, которые выводят систему на устойчивую траекторию, монотонно сходящуюся к точке покоя.

Анализ состояния системы вблизи точки покоя позволяет сделать следующее заключение: Равновесный темп экономического роста положительно зависит от доли субсидирования роста населения (β), темпа прироста населения (v), производительности R&D (λ), величине инноваций (σ); и отрицательно от эластичности предельной полезности (ε), показателя межвременного предпочтения (ρ) и темпа обесценивания капитала (δ).

Нетрудно показать, что выводы из модели, представленные выше оспаривают заключение Юнга о том, что технологический прогресс является малозначимым фактором экономического роста. Изучение составных частей роста производилось для экономики (стран Восточной Азии) с капитальным запасом на эффективную единицу рабочей силы меньшим своего устойчивого равновесного состояния. Эмпирический результат работы [186] не подразумевает, что процесс инноваций относительно неважен для долгосрочного роста. Напротив, если бы инновации были затруднены из-за налогообложения, экономический рост немедленно бы прекратился.

Приведенный результат является прямым следствием того факта, что агрегированный выпуск задается стандартной производственной функцией Кобба-Дугласа с “трудодополняющим” техническим прогрессом. Рассмотрим остаток:

$$\Phi_t = \frac{\dot{Y}_t}{Y_t} - \eta_v \frac{\dot{L}_t}{L_t} - \eta_k \frac{\dot{K}_t}{K} = (1-\alpha)\left(\frac{\dot{L}_t}{L_t} + \frac{\dot{A}_t}{A_t}\right) + \alpha \frac{\dot{K}_t}{K} - \eta_v \frac{\dot{L}_t}{L_t} - \eta_k \frac{\dot{K}_t}{K}$$

где η_v и η_k– соответственно доли вклада труда и капитала в ВВП. При реалистичном предположении, что система национальных счетов относит все монопольные прибыли на счет капитала, следует соотношение $\eta_k = \alpha$. Отметим, что в любой модели, описываемой агрегированной производственной функцией, остаток равняется темпу “трудодополненного” технического прогресса, умноженному на долю труда: $\Phi_t = (1-\alpha)\frac{\dot{A}_t}{A_t} = (1-\alpha)g_t$. После преобразований получаем:

$$\Phi_t = \frac{(1-\alpha)}{1+\alpha\frac{\dot{k}_t/k_t}{g_t}}G_t, \tag{49}$$

где G_t – темп роста выпуска на душу населения.

Предположим, что α равно 0.8, то если экономика находится в устойчивом состоянии: $\dot{k}_t$=0, то на остаточный член приходится 20% темпа роста выпуска на душу населения. Если экономика находится в состоянии ниже точки покоя, т.е. $\dot{k}_t$>0, то из уравнения (49) следует, что остаток будет даже меньше, чем 20%. Полученный результат в точности повторяет данные, полученные Юнгом, для восточно-азиатских “драконов”, которые накапливали капитал с темпом, опережающим равновесное значение.

Изложенные рассуждения еще раз иллюстрируют базовый принцип, что разложение на составляющие (accounting) само по себе не позволяет выявить причинные связи. Сведения о том, что только малая часть роста объясняется инновациями, не подразумевают, что инновации не существенны в определении темпов роста страны. В самом деле, модель даст незначительный остаток даже в достаточно нереальном случае, когда труд является единственным ресурсом для проведения исследований, где инновации, таким образом, являются единственным источником долгосрочного роста.

Вернемся к критике модели эндогенного роста, изложенной в работе Джонса. Существует две причины, по которым увеличение R&D в устойчивом состоянии не влечет соответствующего ускорения темпов роста, как предсказывают более простые модели. Во-первых, при возрастании сложности технологических процессов появляется необходимость в увеличении R&D на протяжении длительного времени только для того, чтобы поддерживать темп инноваций постоянным для каждого продукта. (Вот почему необходимо было делить R_t на A_t^{max} внутри функции ϕ, см. соотношение (48)). Во-вторых, в то время как число продуктов увеличивается, инновация в каком-либо одном из них влияет на меньший сектор экономики, и, отсюда, наблюдается незначительный эффект “перелива” в агрегированном запасе знания.

Джонс предложил похожую теорию для реабилитации моделей роста, основанных на эндогенных инновациях, но заключил, что в его модели долгосрочный рост не зависит от склонности к инновациям или склонности к накоплению капитала, а зависит только от темпа прироста населения. Метод, изложенный выше, приводит к противоположным заключениям, а именно, что темп долгосрочного роста зависит от склонности к инновациям и накоплению капитала.

Ключевое различие между расширенной моделью Шумпетера и моделью Джонса заключается в том, что в первой принимается, что капитал также как и труд используется в R&D. Джонс предположил, что технологическая функция для исследований имеет следующий вид:

$$\dot{A}_t / A_t = \zeta (L_t^r)^{\gamma} A_t^{\psi-1}, \quad 0<\psi<1, \zeta>0, 0<\gamma<1. \tag{50}$$

где L_t^r затраты труда на R&D. В точке покоя $L_t^r / L_t = const$ и $\dot{A}_t / A_t = g$, таким образом:

$$g = \frac{\gamma \nu}{1-\psi}$$

Следовательно, рост в долгосрочной перспективе зависит только от темпа прироста населения и некоторых других параметров, которые не зависят от воздействий экономических агентов.

В изложенной выше модели инновационная технология также может иметь вид (50) в случае специального вида функции $\phi(n) = n^{\gamma}$:

$$\dot{A}_t / A_t = \zeta (R_t)^{\gamma} A_t^{\psi-1} \tag{51}$$

где $\zeta \equiv \sigma\lambda(1+\sigma)^{-\gamma}$ и $\psi = 1-\gamma$. Отличие от результата Джонса состоит в том, что в R_t входит как капитал так и труд. Так как в состоянии покоя системы R_t растет с тем же темпом что и A_t, то соотношение (51) не может быть использовано для нахождения темпа равномерного роста (*steady-state growth rate*) независимо от остальных уравнений модели.

Вместо того, чтобы предсказывать, что число ученых и инженеров, занятых в R&D должно оставаться постоянным во время периода относительно устойчивого роста дохода на душу населения, представленная модель утверждает, что доля расходов на R&D в ВВП должна оставаться постоянной. Общие затраты на R&D составляли от 2.2% до 2.9% в год в экономике США в период с 1957 по 1996 год, причем ярко выраженного тренда не наблюдалось. Таким образом данные по тенденциям развития R&D в США не опровергают, а скорее подтверждают эндогенную теорию роста.

2.14 Обзор моделей роста в российской литературе

Производственная функция играет важнейшую роль в макроэкономических исследованиях. Различные спецификации производства призваны объяснить такие явления, как долговременный рост, экономический спад, циклические явления в динамике производства и др. О.Г. Голиченко (2001) изучает проблему существования долговременного роста экономики. Как известно, в рамках неоклассической теории (в том числе и с учетом НТП) никаким перераспределением средств между факторами производства невозможно добиться долгосрочного роста, темп которого не определялся бы экстенсивным фактором—темпом роста используемого труда. Попытка объяснения феномена путем введения научно-технического прогресса как фактора, оказывающего влияние на производственную функцию[12], не привело к изменению результата. Причиной тому было то, что не была учтена специфика инновационной деятельности. Новый неоклассический подход, возникший в середине 1980-х, основывался на моделировании воздействия инновационной деятельности и накопления человеческого капитала на экономический рост через технологические сдвиги. Однако при этом возникала проблема разрыва единства теории, поскольку связь между “старой” и “новой” теорией казалась неочевидной. Для определения связи между теориями авторы предложили рассмотреть производственную функцию вида:

$$Y=F(\psi_l \boldsymbol{L},\ \psi_L L,\ K),$$

[12] Модели Эрроу и Шешински.

Где **L**, L—квалифицированный и неквалифицированный труд соответственно;

ψ_l, ψ_L — коэффициенты эффективности труда, зависящие не от объема основного капитала (накопленных инвестиций)[13], а от размера технологических знаний, воплощенных в основном капитале;

K—физический объем капитала, допускающий дезагрегирование в некоторую совокупность различных типов основного капитала K_j, каждый из которых соответствует некоторой технолгической разработке j из множества J.

Можно показать, что для данной производственной функции справедливо разложение:

$$G_y=(1-\alpha_K)\rho G_{KJ} + \alpha_l G_l + \alpha_L G_L+\alpha_K G_K, \tag{52}$$

где G характеризует темп роста заданной величины;

G_{KJ}—темп роста оценки накопленных затрат на технологии;

$$\rho = (\alpha_l e_l+\alpha_L e_L/(1-\alpha_K)); \tag{53}$$

$$e_l= (d\ln\psi_l / d\ln\Phi(J));$$

$$e_L= (d\ln\psi_L / d\ln\Phi(J)).$$

В отсутствие технического прогресса (при $G_{KJ}=0$) данная производственная функция проявляет все свойства неоклассической модели роста с учетом человеческого капитала[14].

В условиях технического прогресса ситуация кардинально меняется. В случае если, начиная с некоторого момента времени t_0 в экономической системе весь рост основного капитала обеспечивается ростом множества технологических разработок ($G_K=G_{KJ}$), результат будет зависеть от величины ρ. Эта переменная является средневзвешенной эластичностью коэффициентов эффективности труда по накопленным затратам на технологии с корректировкой на эластичность выпуска по капиталу, где в качестве весов берутся эластичности выпуска по двум типам труда (см. (19)):

---

[13] как это было в моделях Эрроу - Шешински

[14] т.е. устойчивой траекторией является оптимальной по Харроду ($G_Y=G_K$), а экономический рост в долгосрочной перспективе определяется выпуклой комбинацией темпов прироста квалифицированного и неквалифицированного труда.

- *ρ<1.* В случае если после момента t_0 отсутствовал прирост труда, а склонность к сбережению была неизменной, то в долгосрочной перспективе должно произойти падение до нулевого уровня темпа экономического роста и темпа роста капитала, несмотря на наличие технического прогресса, т.е. чисто технологический рост (без роста трудовых ресурсов) в данном случае не может иметь место. Малое значение ρ говорит о том, что относительное накопление затрат на технологии не приводит к большому росту значимости труда в производственном процессе, либо что эластичности выпуска по двум видам труда невелики при малой эластичности выпуска по капиталу[15]. Таким образом, рост основного капитала, обеспеченный ростом множества технологических разработок, но не поддержанный ростом эффективности трудовых ресурсов не может привести к долговременному экономическому росту. Именно этот случай соответствует моделям Шешински – Эрроу.
- ρ>1. Данный случай противоположен предыдущему— увеличение накопленных затрат приводит к относительно большему увеличению эффективности труда в производственном процессе, либо эластичности выпуска по труду и капиталу достаточно велики. В данном случае может иметь место чисто технологический рост, темп которого превосходит темп увеличения основного капитала (растущая фондоотдача). Вовлечение новых трудовых ресурсов приводит к росту выпуска и фондоотдачи.
- *ρ=1.* В отсутствие роста труда после момента времени t_0 темп становится равным темпу роста основного капитала, фондоотдача не меняется. Таким образом, в этом случае технологический рост оптимален по Харроду.

Рассматриваемый класс моделей позволяет исследовать факторы экономического роста, основанного на инновациях, в число которых вошли эластичность накопленных затрат на технологические знания, производительность научно-исследовательского труда, отношение эластичностей национального продукта по квалифицированному труду и капиталу, эластичности совокупного спроса по общему индексу цен и эластичности общего индекса цен относительно цен на инвестиционные товары. Показано также, что при определенных

---

[15] Возможны и другие комбинации переменных, определяющих данную величину, дающие значение ρ меньше 1.

предпосылках рост слоя высокообразованных людей при проведении соответствующей политики в области образования или снижение ставки процента в результате проведения соответствующих инструментов макроэкономической политики могут приводить к увеличению темпов технологического роста.

Еще одним, не менее важным, чем противоречащее стандартным теориям явление долговременного роста, является факт существования значимого разрыва в темпах роста между странами. Данный феномен затрагивается в работе Г. Трофимова (2000). Автор делает попытку выявить причины межстрановой дифференциации долговременного экономического роста. Для этого вводится модель эндогенного роста без рассмотрения внешнеторговых взаимоотношений; показывается, что этой модели вполне достаточно для объяснения изучаемых эффектов. Важнейшей особенностью модели является учет индивидуальных затрат на обучение в форме потерь полезности экономического агента. Производственная функция описывается функцией Кобба-Дугласа с техническим прогрессом, темп роста которого линейным образом зависит от интенсивности обучения *e*:

$Y=K^{a}(hL)^{1-a}$,

$h'/h = g_0+g_1e$,

$0 \le e \le 1$.

Именно такой вид производственной функции позволяет разъяснить причины дифференциации долгосрочных темпов роста между странами, поскольку теперь существует возможность двух стационарных состояний — состояний интенсивного и экстенсивного роста[16]. Показано, что режим интенсивного роста не может быть реализован, если индивидуальная норма дисконта и эластичность свободного времени достаточно высоки. Для реализации режима интенсивного роста необходимы два условия: экономика должна обладать высоким потенциалом роста, что предполагает наличие высокоэффективной системы обучения, а также не должна быть высокой предельная полезность свободного времени или текущего потребления относительно будущего.

[16] Понятия интенсивного и экстенсивного роста у Трофимова отличаются от понятий Голиченко: в интенсивном режиме индивидуумы прилагают ненулевые усилия на получение обучения ($0<e\le 1$), тогда как в экстенсивном режиме $e=0$, и рост обеспечивается лишь экзогенными факторами.

Таким образом, несмотря на существенное различие в определениях, для существования интенсивного роста необходимо как минимум, чтобы экономическая система функционировала в условиях активного участия трудовых ресурсов в производственном процессе: в первой модели это участие определяется показателями эффективности труда ψ, динамика которых задана экзогенно, во втором же случае эндогенным параметром e, характеризующим уровень усилий экономических агентов.

Заключение

В настоящей работе нами был проведен обзор теоретических и эмпирических работ в области декомпозиции экономического роста на основе производственных функций. В частности, было проведено сопоставление микро- и макропроизводственных функций. Также нами были рассмотрены предпосылки существования макропроизводственной функции и взаимосвязь между параметрами микро- и макропроизводственной функции.

Наш интерес к микропроизводственным функциям во многом обусловлен тем, что предпосылки существования макропроизводственной функции могут оказаться слишком жесткими применительно к российским условиям. Так, в число данных предпосылок входит необходимость максимизирующего прибыль поведения всех предприятий в экономике и совершенная конкуренция на факторных и товарных рынках. Очевидно, в силу переходного характера российской экономики данные условия могут не выполняться.

Литература

1. Aghion, Philippe (2001) "Schumpeterian Growth Theory and the Dynamics of Income Inequality", Working Paper
2. Aghion, Philippe and Howitt, Peter. (1992), "A Model of Growth Through Creative Destruction", *Econometrica,* 60(2):323-351, March.
3. Aghion, Philippe and Howitt, Peter. (1998), "Endogenous Growth Theory", *Econometrica,* 60(2):323-351, March.
4. Alesina, Alberto, Ozler, Sule, Roubini, Nouriel, and Swagel, Phillip. (1996), "Political Instability and Economic Growth", *Journal of Economic* Growth, 1(2): 189-211, June.
5. Alesina, Alberto and Rodrik, Dani. (1994), "Distributive Politics and Economic Growth", *Quarterly Journal of Economics,* 109(2) :465-490, May.
6. Azariadis, Costas and Drazen, Allan. (1990), "Threshold Externalities in Economic Development", *Quarterly Journal of Economics,* 105(2) :501-526, May.
7. Barro, Robert J. (1991), "Economic Growth in a Cross-Section of Countries", Quarterly *Journal of Economics,* 106(2):407-443, May.
8. Barro, Robert J. (1996), "Democracy and Growth", *Journal of Economic Growth,* 1(1):1-27, March.
9. Barro, Robert J. and Lee, Jong-Wha. (1994), "Sources of Economic Growth", *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy,* 40:1-57.
10. Barro, Robert J. and Sala-i-Martin, Xavier. (1991), "Convergence Across States and Regions", *Brookings Papers on Economic Activity,* 1:107-182, April.
11. Barro, Robert J. and Sala-i-Martin, Xavier. (1992), "Convergence", *Journal of Political Economy,* 100(2):223-251, April.
12. Barro, Robert J. and Sala-i-Martin, Xavier. (1995), *Economic Growth,* McGraw-Hill.
13. Baumol, William J. (1986), "Productivity Growth, Convergence, and Welfare", *American Economic Review,* 76(5):1072-85, December.
14. Ben-David, Dan. (1996), "Trade and Convergence Among Countries", Jour-*nal of International Economics,* 40((3/4)):279-298.
15. Benabou, Roland. (1993), "Workings of a City: Location, Education, and Production", *Quarterly Journal of Economics,* 108(3):619-52, August.

16. Benhabib, Jess and Spiegel, Mark M. (1997), "Cross-Country Growth Regressions", Working Paper 97-20, CV Starr Center, New York University.
17. Bernard, Andrew B. and Durlauf, Steven N. (1995), "Convergence in International Output", *Journal of Applied Econometrics*, 10(2):97-108, April.
18. Bernard, Andrew B. and Durlauf, Steven N. (1996), "Interpreting Tests of the Convergence Hypothesis", *Journal of Econometrics*, 71(1-2):161-174.
19. Bernanke, Ben S. and Gurkaynak, Refet S. (2001), "Is Growth Exogenous? Taking Mankiw, Romer and Weil Seriously", NBER, Working Paper 8365
20. Bianchi, Marco. (1997), "Testing for Convergence: Evidence from Non-Parametric Multimodality Tests", *Journal of Applied Econometrics*, 12(4):393-409, July.
21. Blomstrom, Magnus, Lipsey, Robert E., and Zejan, Mario. (1996), "Is Fixed Investment the Key to Economic Growth?", *Quarterly Journal of Economics*, 111(1):269-276, February.
22. Breiman, Leo, Friedman, Jerome H., Olshen, Richard A., and Stone, Charles J. (1984), *Classification and Regression Trees*, Chapman and Hall, New York.
23. Brock, William A. and Durlauf, Steven N. (2000) "Growth Economics and Reality", NBER, Working Paper 8041.
24. Canova, Fabio and Marcet, Albert. (1995), "The Poor Stay Poor: Non-Convergence across Countries and Regions", Discussion Paper 1265, CEPR, November.
25. Caselli, Francesco, Esquivel, Gerardo, and Lefort, Fernando. (1996), "Reopening the Convergence Debate: A New Look at Cross-Country Growth Empirics", *Journal of Economic Growth*, 1(3):363—389, September.
26. Cass, David. (1965), "Optimal Growth in an Aggregate Model of Capital Accumulation", Review *of Economic Studies*, 32:233-240, July.
27. Cho, Dongchul. (1996), "An Alternative Interpretation of Conditional Convergence Results", *Journal of Money, Credit, and Banking*, 28(4):669-681.
28. Coe, David T. and Helpman, Elhanan. (1995), "International R&D Spillovers", *European Economic Review*, 39(5):859-887, May.
29. Cohen, Daniel. (1996), "Tests of the 'Convergence Hypothesis': Some Further Results", *Journal of Economic Growth*, 1(3):351-362, September.
30. DeLong, J. Bradford. (1988), "Productivity Growth, Convergence, and Welfare: A Comment", American *Economic Review*, 78(5):1138-55, December.

31. DeLong, J. Bradford and Summers, Lawrence H. (1993), "How Strongly Do Developing Economies Benefit from Equipment Investment", *Journal of Monetary Economics*, 32(3):395-415.
32. den Haan, Wouter J. (1995), "Convergence in Stochastic Growth Models: The Importance of Understanding Why Income Levels Differ", *Journal of Monetary Economics*, 35(1):65-82, February.
33. Desdoigts, Alain. *Changes in the* World Income *Distribution: A Non-Parametric Approach to Challenge the Neoclassical Convergence Argument.* PhD thesis, European University Institute, Florence, June 1994.
34. Duffy, J. and Papageorgiou, C. (1997), "The Specification of the Aggregate Production Function: A Cro*ss*-Country Empirical Investigation", Working paper, University of Pittsburgh.
35. Durlauf, Steven N. (1989), "Output Persistence, Economic Structure, and the Choice of Stabilization Policy", *Brookings Papers on Economic Activity,* 2:69-116.
36. Durlauf, Steven N. (1993), "Nonergodic Economic Growth", *Review of Economic Studies,* 60(2):349-366, April.
37. Durlauf, Steven N. (1996), "A Theory of Persistent Income Inequality", *Journal of Economic Growth,* 1(1):75-93, March.
38. Durlauf, Steven N. and Johnson, Paul A. (1995), "Multiple Regimes and Cross-Country Growth Behavior", *Journal of Applied Econometrics,* 10(4):365-384, October.
39. Durlauf, Steven N. and Quah, Danny T. (1998), "The New Empirics of Economic Growth", NBER, Working Paper 6422 (prepared for *Handbook of Macroeconomics*)
40. Easterly, William. (1993), "How Much Do Distortions Affect Growth?", *Journal of Monetary Economics,* 32(2):187-212.
41. Easterly, William, Kremer, Michael, Pritchett, Lant, and Summers, Lawrence H. (1993), "Good Policy or Good Luck? Country Growth Performance and Temporary Shocks", *Journal of Monetary Economics,* 32(3):459-483.
42. Esteban, Joan-Maria and Ray, Debraj. (1994), "On the Measurement of Polarization", *Econometrica,* 62(4):819-851, July.
43. Forbes, Kristin. (1997), "Back to the Basics: The Positive Effect of Inequality on Growth", Working paper, MIT, Cambridge.

44. Frankel, Jeffrey A. and Romer, David. (1996), "Trade and Growth: An Empirical Investigation", NBER, Working Paper 5476
45. Frankel, Jeffrey A., Romer, David, and Cyrus, Teresa. (1996), "Trade and Growth in East Asian Countries: Cause and Effect?", NBER, Working Paper 5732.
46. Franses, Philip Hans and Hobijn, Bart. (1995), "Convergence of Living Standards: An International Analysis", Technical Report 9534/A, Econometric Institute, Erasmus University Rotterdam, September.
47. Friedman, Milton. (1992), "Do Old Fallacies Ever Die?", *Journal of Economic Literature,* 30(4):2129-2132, December.
48. Futia, Carl. (1982), "Invariant Distributions and the Limiting Behavior of Markovian Economic Models", *Econometrica,* 50(1):377-408, January.
49. Galor, Oded. (1996), "Convergence? Inferences from Theoretical Models", *Economic Journal*, 106(437): 1056-1069, July.
50. Galor, Oded and Zeira, Joseph. (1993), "Income Distribution and Macroeconomics", *Review of Economic Studies,* 60(1):35-52, January.
51. Grier, Kevin B. and Tullock, Gordon. (1989), "An Empirical Analysis of Cross-National Economic Growth, 1951-80", *Journal of Monetary Economics,* 24(2):259-276, November.
52. Grossman, Gene M. and Helpman, Elhanan. (1991), *Innovation and Growth in the Global Economy,* MIT Press.
53. Harrison, Ann. (1995), "Openness and Growth: A Time-Series, Cross-Country Analysis for Developing Countries", Working Paper 5221, NBER, Cambridge.
54. Helpman, Ethanan and Trajtenberg, Manuel (1996), "Diffusion of General Purpose Technologies", NBER, Working Paper 5773.
55. Islam, Nazrul. (1995), "Growth Empirics: A Panel Data Approach", *Quarterly Journal of Economics*, 110(443) :1127-1170, November.
56. Jones, Charles I. (1995), "R&D-based Models of Economic Growth", *Journal of Political Economy,* 103(3) :759-784, August.
57. Jones, Charles I. (1995). "Time Series Tests of Endogenous Growth Models", *Quarterly Journal of Economics,* 110:495-525, May.
58. Jones, Charles I. (1997), "On the Evolution of the World Income Distribution", *Journal of Economic Perspectives,* 11(3): 19-36, Summer.

59. Jones, Larry E. and Manuelli, Rodolfo. (1990), "A Convex Model of Equilibrium Growth: Theory and Implications", *Journal of Political Economy,* 98(5, part 1):1008-1038, October.
60. Kaldor, Nicholas. (1963), "Capital Accumulation and Economic Growth", in Lutz, Friedrich A. and Hague, Douglas C., (eds.), *Proceedings of a Conference Held by the International Economics Association.* Macmillan, London.
61. Kelly. Morgan. (1992), "On Endogenous Growth with Productivity Shocks", *Journal of Monetary Economics,* 30(1):47-56, October.
62. King, Robert G. and Levine, Ross. (1993), "Finance and Growth: Schumpeter Might Be Right", *Quarterly Journal of Economics,* 108(3) :717-737.
63. Klenow, Peter J. and Rodriges-Clare, Andres (1997) "The Neoclassical Revival in Growth Economics: Has It Gone Too Far", NBER Macroeconomics Annual:73-102
64. Klenow, Peter J. and Rodriges-Clare, Andres (1997) "Economic Growth: a Review Essay", *Journal of Monetary Economics,* 40:597-617
65. Knowles, Stephen and Owen, P. Dorian. (1995), "Health Capital and Cross-Country Variation in Income per Capita in the Mankiw-Romer-Weil Model", Economics Letters, 48(1):99-106.
66. Kocherlakota, Narayana R. and Yi, Kei-Mu. (1995), "Can Convergence Regressions Distinguish Between Exogenous and Endogenous Growth Models?", *Economics Letters,* 49:211-215.
67. Koopmans, Tjalling C. (1965), "On the Concept of Optimal Economic Growth", in *The Econometric Approach to Development Planning.* North Holland, Amsterdam.
68. Kormendi, Roger and Mequire, P. (1985), "Macroeconomic Determinants of Growth: Cross-Country Evidence", *Journal of Monetary Economics,* 16(2):141-163.
69. Learner, Edward E. (1978), *Specification Searches: Ad Hoc Inference from Non-Experimental Data,* John Wiley, New York.
70. Lee, Kevin, Pesaran, M. Hashem, and Smith, Ron P. (1997), "Growth and Convergence in a Multi-Country Empirical Stochastic Solow Model", *Journal of Applied Econometrics,* 12(4):357-392, July.
71. Leung, Charles and Quah, Danny. (1996), "Convergence, Endogenous Growth, and Productivity Disturbances", *Journal of Monetary Economics,* 38(3):535-547, December.

72. Levin, Andrew and Lin, Chien-fu. (1992), "Unit Root Tests in Panel Data: Asymptotic and Finite-Sample Properties", Working paper, Economics Department, UCSD, San Diego.
73. Levine, Ross and Renelt, David. (1992), "A Sensitivity Analysis of Cross-Country Growth Regressions", *American Economic Review,* 82(4): 942-963, September.
74. Lucas Jr., Robert E. (1988), "On The Mechanics of Economic Development", *Journal of Monetary Economics*, 22(3):3-42, June.
75. Lucas Jr., Robert E. (1993), "Making a Miracle", Econometrica, 61(2):251-271, March.
76. Mankiw, N. Gregory, Romer, David, and Weil, David N. (1992), "A Contribution to the Empirics of Economic Growth", *Quarterly Journal of Economics,* 107(2) :407-437, May.
77. Mauro, Paolo. (1995), "Corruption and Growth", *Quarterly Journal of Economics,* 110(3):681-713, August.
78. McCallum, Bennet (1996) "Neoclassical vs. Endogenous Growth Analysis: an Overview", NBER Working Paper 5844
79. McGrattan, Ellen R. and Schmitz Jr, James A. (1998) "Explaining Cross-Country Income Differences", Federal Reserve Bank of Minneapolis, Research Department Staff Report 250
80. Murphy, Kevin M., Shieifer, Andrei, and Vishny, Robert W. (1989), "Industrialization and the Big Push", *Journal of Political Economy,* 97(4): 1003-1026, October.
81. Murphy, Kevin M., Shieifer, Andrei, and Vishny, Robert W. (1991), "The Allocation of Talent: Implications for Growth", *Quarterly Journal of Economics,* 106(2) :503-530, May.
82. Nelson, Charles R. and Plosser, Charles I. (1982), "Trends and Random Walks in Macroeconomic Time Series", *Journal of Monetary Economics,* 10:129-162, September.
83. Nerlove, Marc. (1996), "Growth Rate Convergence, Fact or Artifact?", Working paper, University of Maryland, June.
84. Perron, Pierre. (1989), "The Great Crash, the Oil Price Shock, and the Unit Root Hypothesis", *Econometrica,* 57(6):1361-1401, November.

85. Persson, Torsten and Tabellini, Guido. (1994), "Is Inequality Harmful for Growth?", *American Economic Review,* 84(3):600-621, June.
86. Pritchett, Lant. (1997), "Divergence, Big Time", *Journal of Economic Perspectives,* 11(3):3-17, Summer.
87. Quah, Danny. (1992), "International Patterns of Growth: I. Persistence in Cross-Country Disparities", Working paper, LSE, London, October.
88. Quah, Danny. (1993), "Empirical Cross-Section Dynamics in Economic Growth", *European Economic Review,* 37(2/3) :426-434, April.
89. Quah, Danny. (1994), "Exploiting Cross Section Variation for Unit Root Inference in Dynamic Data", *Economics Letters,* 44(1):9-19, January.
90. Quah, Danny. (1996), "Aggregate and Regional Disaggregate Fluctuations", *Empirical Economics,* 21(1):137-159, March.
91. Quah, Danny. (1996), "Convergence Empirics Across Economies with (Some) Capital Mobility", *Journal of Economic Growth,* 1(1):95-124, March.
92. Quah, Danny. (1996), "Empirics for Economic Growth and Convergence", *European Economic Review,* 40(6): 1353-1375, June.
93. Quah, Danny. (1997), "Empirics for Growth and Distribution: Polarization, Stratification, and Convergence Clubs", *Journal of Economic Growth,* 2(1):27-59, March.
94. Ramey, Garey and Ramey, Valerie A. (1995), "Cross-Country Evidence on the Link Between Volatility and Growth", *American Economic Re*view, 85(5):1138-1151, December.
95. Rebelo, Sergio. (1991), "Long-Run Policy Analysis and Long-Run Growth", *Journal of Political Economy,* 99(3):500-521, June.
96. Romer, Paul M. (1986), "Increasing Returns and Long-run Growth", *Journal of Political Economy,* 94(5): 1002-1037, October.
97. Romer, Paul M. (1990), "Endogenous Technological Change", *Journal of Political Economy,* 98(5, part 2):S71-S102, October.
98. Romer, Paul M. (1993), "Idea Gaps and Object Gaps in Economic Development", *Journal of Monetary Economics,* 32(3):543-574, December.
99. Romer, Paul M. (1994), "The Origins of Endogenous Growth", *Journal of Economic Perspectives,* 8(1):3-22, Winter.

100. Sala-i-Martin, Xavier X. (1996), "Regional Cohesion: Evidence and Theories of Regional Growth and Convergence", *European Economic* Review, 40(6):1325-1352, June.

101. Sala-i-Martin, Xavier X. (1997), "I Just Ran Two Million Regressions", *American Economic Association Papers and Proceedings*, 87(2):178-183, May.

102. Solow. Robert. M. (1956). "A contribution to the theory of economic growth", *Quarterly Journal of Economics*, 70:65-94.

103. Solow. Robert. M. (1957). "Technical change and the aggregate production function", *Review of Economics and Statistics*, 39:312-20.

104. Solow. Robert. M. (1988). "Growth theory and after", *American Economic Review*, 78:307-17.

105. Solow. Robert. M. (1994). "Perspectives on growth theory", *Journal of Economic Perspectives*, 8:45-54.

106. Swan, T.W. (1956) "Economic Growth and Capital Accumulation", *Economic Record*, 32:334-361.

107. Young, Alwyn (1993) "Lessons from the East Asian NICs: a Contrarian View", NBER Working Paper 4482

108. Young, Alwyn (1994) "The Tyranny of Numbers: Confronting the Statistical Realities of the East Asian Growth Experience", NBER Working Paper 4680

109. В.А. Бессонов “Проблемы построения производственных функций в российской переходной экономике”, ИЭПП, Москва, 2002

110. Г. Б. Клейнер, Д. И. Пионтковский, “О характеризации производственных функций Солоу”, Экономика и математические методы, 1999, том 35, номер 2, с. 124-137;

111. Г. Б. Клейнер, Д. И. Пионтковский, “Многофакторные производственные функции с постоянными эластичностями предельной замены факторов”, Экономика и математические методы, 2000, том 36, номер 1, с. 90-114;

112. В.П. Котельников, “О распределениях значений производственной функции Кобба-Дугласа”, Экономика и математические методы, 2001, том 37, номер 4, с. 44-49;

113. О.Г. Голиченко, “Проблема регулирования экономического роста в макроэкономических моделях”, Экономика и математические методы, 2001, том 37, номер 4, с. 33-43;

114. Г. Трофимов, “О режимах долговременного экономического роста”, Вопросы экономики, 2000, номер 11, стр. 27 – 45;

115. Н. К. Козлов, “Производственные функции и количество рабочих мест”, Проблемы прогнозирования, 1997 г., номер 4, стр. 52-65;

116. Н. К. Козлов, “Производственные функции и лаг “затраты—выпуск”, Проблемы прогнозирования, 1998 г., номер 5, стр. 63-73.

Приложение

Существование макроэкономической производственной функции

Формальное доказательство существования макропроизводственной функции можно проиллюстрировать следующим образом (приводится по работе Саржента (Sargent, 1987)).

Предположим, в экономике действует N предприятий, каждое из которых характеризуется производственной функцией $y_i = F_i(x_{1i}, x_{2i})$, где y_i, x_{1i} и x_{2i} соответственно объемы выпуска, затрат капитала и труда. Вопрос состоит в том, существует ли производственная зависимость между агрегированными экономическими показателями - y, x_1 и x_2, где $y = \sum_{i=1}^{N} y_i$, $x_1 = \sum_{i=1}^{N} x_{1i}$, $x_2 = \sum_{i=1}^{N} x_{2i}$.

Для максимизирующей прибыль фирмы должно выполняться следующее соотношение:

$$\Pi_i = p_0 F_i(x_{1i}, x_{2i}) - p_1 x_{1i} - p_2 x_{2i} \rightarrow \max_{x_{2i}} \quad (1).$$

Предполагается, что в краткосрочном периоде объем используемого фирмой капитала x_{1i} фиксирован, поэтому фирма максимизирует прибыль, варьируя объемом используемого труда x_{2i}.

Условия первого порядка для задачи (1) приводят к соотношению:

$$\frac{\partial F_i(x_{1i}, x_{2i})}{\partial x_{2i}} = \frac{p_2}{p_0}.$$

Заметим, что предельную производительность труда можно представить в виде:

$$\frac{\partial F_i(x_{1i}, x_{2i})}{\partial x_{2i}} = f_i(k_i) - \frac{\partial f_i(k_i)}{\partial k_i} k_i,$$

где $k_i = \dfrac{x_{1i}}{x_{2i}}$, $f_i(k_i) = F(\dfrac{x_{1i}}{x_{2i}}, 1)$.

Заметим, что в условиях совершенной конкуренции соотношение $\frac{p_2}{p_0}$ одинаково для всех фирм, а производительность труда зависит только от одной переменной k_i. В результате получаем, что капиталовооруженность k_i одинакова для всех фирм: $k_i = k \quad \forall i$.

Для однородных в степени один производственных функций справедливо соотношение Эйлера:

$$y_i = \frac{\partial F_i(x_{1i}, x_{2i})}{\partial x_{1i}} x_{1i} + \frac{\partial F_i(x_{1i}, x_{2i})}{\partial x_{2i}} x_{2i}.$$

Поскольку $\frac{\partial F_i(x_{1i}, x_{2i})}{\partial x_{1i}} = \frac{\partial f_i(k_i)}{\partial k_i}$, $\frac{\partial F_i(x_{1i}, x_{2i})}{\partial x_{2i}} = f_i(k_i) - \frac{\partial f_i(k_i)}{\partial k_i} k_i$, т.е. предельная производительность зависит только от капиталовооруженности и вида производственной функции. Поскольку все фирмы обладают одинаковой производственной функцией ($F_i(x_{1i}, x_{2i}) = F(x_{1i}, x_{2i}) \ \forall i$) и одной и той же капиталовооруженностью k, предельная производительность факторов равна для всех фирм:

$$F_1 = \frac{\partial F(x_{1i}, x_{2i})}{\partial x_{1i}}, \ F_2 = \frac{\partial F(x_{1i}, x_{2i})}{\partial x_{2i}}.$$

Учитывая данный факт, уравнение Эйлера можно переписать в виде:

$$y_i = F_1 x_{1i} + F_2 x_{2i}. \quad (2)$$

Просуммировав левые и правые части выражения (2) для всех фирм, получаем:

$$y = F_1 x_1 + F_2 x_2,$$

что равносильно записи:

$$y = F(x_1, x_2).$$

Таким образом, получаем, что при названных выше предпосылках существует макроэкономическая производственная функция, имеющая ту же функциональную форму и те же параметры, что и производственная функция отдельных предприятий в экономике.

Препринт WP…/2013/…
Серия WP…
[Название серии]

Казакова Мария Владимировна

Анализ зарубежного опыта в области декомпозиции экономического роста на основе оценки производственных функций