**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»**

М.В. Казакова

Анализ свойств производственных функций, используемых при декомпозиции экономического роста

Москва 2013

Аннотация. В данной работе нами рассматриваются некоторые свойства различных производственных функций. Одним из ключевых моментов при построении эмпирических производственных функций является выбор функциональной формы. При этом важно учитывать, какие предпосылки и ограничения связаны с использованием той или иной функциональной формы для моделирования экономической реальности. В ряде случаев данные предпосылки и ограничения задаются неявным образом в процессе создания конкретной производственной функции. Основная цель приведенного в работе теоретического обзора как раз состоит в выявлении и описании возможных ограничений, как явных, так и неявных, связанных с использованием различных видов производственных функций.
Автор выражает благодарность Фокиной Т.В. за предоставленные материалы и ценные комментарии.

Данная работа подготовлена на основе материалов исследования, выполненного в соответствии с тематическим планом фундаментальной и прикладной научно-исследовательской работы РАНХиГС при Президенте Российской Федерации на 2011 год.

Содержание

Введение[1]

В данном разделе рассматриваются некоторые свойства различных производственных функций. Одним из ключевых моментов при построении эмпирических производственных функций является выбор функциональной формы. При этом важно учитывать, какие предпосылки и ограничения связаны с использованием той или иной функциональной формы для моделирования экономической реальности. В ряде случаев данные предпосылки и ограничения задаются неявным образом в процессе создания конкретной производственной функции. Основная цель приведенного теоретического обзора как раз состоит в выявлении и описании возможных ограничений, как явных, так и неявных, связанных с использованием различных видов производственных функций.

В первой части обзора рассматриваются основные характеристики производственных функций, на основе которых во второй части анализируются наиболее часто используемые функциональные формы.

1. Основные характеристики производственных функций

Производственная функция имеет ряд характеристик, отражающих качество аппроксимации моделируемых с ее помощью экономических процессов. Набор таких характеристик достаточно широк. Однако значительная часть из них не несет новой информации о производственной функции как экономической модели, а является формальной комбинацией прочих характеристик. Кроме того, многие из предлагавшихся в литературе характеристик могут быть построены только для относительно простых производственных функций, а потому не применимы для сравнения функций между собой. С учетом приведенных соображений нами было отобрано несколько наиболее информативных характеристик, которые можно использовать для сравнительных целей.

---

[1] Автор выражает благодарность Р.М.Энтову, С.Г.Синельникову-Мурылеву, С.М.Дробышевскому, О.В.Луговому, М.Ю.Турунцевой и Е.В.Астафьевой за ценные комментарии и замечания, высказанные в ходе обсуждения данной работы на различных этапах ее подготовки.

Первым критерием адекватности производственной функции является принадлежность ее к классу неоклассических. Условия принадлежности к данному классу включают некоторые наиболее очевидные требования к производственной функции как модели экономической реальности, а также условия регулярности[2]. О последнем требовании следует сказать особо. Дело в том, что производственная функция обычно рассматривается не сама по себе, а в контексте экономических моделей поведения производителя. Помимо собственно производственной функции данные модели включают функцию издержек и условия формирования прибыли. На основе моделей поведения производителя можно получить важные экономические выводы, подлежащие последующей эмпирической апробации. Нарушение условий регулярности может существенно осложнить, если не сделать невозможным, работу в данном направлении. Кроме того, для громоздких математических конструкций, коими большей частью являются нерегулярные производственные функции, нередко нельзя построить некоторые описательные характеристики, что затрудняет сравнение данных функций с альтернативными моделями.

При определении класса неоклассических функций в литературе существуют некоторые расхождения, но наиболее часто используется следующее определение. Производственная функция $f(x)$ принадлежит к классу неоклассических (здесь $x = (x_1, ..., x_n)$ - набор производственных факторов) при выполнении следующих условий:

1. $f(x)$ непрерывна.

2. Производство при отсутствии хотя бы одного ресурса невозможно, т.е. $f(0, x_2, ..., x_n) = f(x_1, 0, ..., x_n) = f(x_1, x_2, ..., 0) = 0$. Т.е. каждый ресурс является в какой-то мере уникальным для производственного процесса. В более мягком варианте данное условие выглядит как $f(0) = 0$, т.е. производство невозможно лишь при отсутствии всех факторов.

3. $f(x)$ дважды дифференцируема. Смысл использования дифференциальных характеристик производственной функции состоит в том, что значение такой характеристики в фиксированной точке $x = (x_1, ..., x_n)$ пространства аргументов

[2] Под регулярностью в данном случае понимается непрерывность и дифференцируемость.

определяет характер поведения функции не только в данной точке, но и в ее окрестности.

4. Первые производные $f(x)$ по всем факторам являются непрерывными и неотрицательными функциями, т.е. $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \geq 0$ для всех $i = 1,...,n$.Данное условие означает, что в нормальных условиях при увеличении количества включенных в производство ресурсов выпуск не уменьшается.

5. Предельная производительность каждого фактора является непрерывной невозрастающей функцией от объема этого фактора, т.е. $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i^2} \leq 0$ для всех $i = 1,...,n$. Это есть не что иное, как условие убывающей предельной производительности. Более мягким вариантом данного ограничения является условие квазивогнутости функции $f(x)$ [3].

Наибольший интерес при анализе любой производственной функции в первую очередь представляют следующие ее характеристики:

1. Степень однородности.
2. Отдача от масштаба.
3. Эластичность замещения между факторами.
4. Поведение доли вознаграждения за труд в общем объеме номинального выпуска.

Рассмотрим более подробно каждую из этих характеристик.

1.1 Степень однородности

Говорят, что производственная функция $f(x)$ является однородной степени ξ, если существует такое $\xi > 0$, что для произвольного $\lambda > 0$ справедливо:

$$f(\lambda x) = \lambda^{\xi} f(x).$$

---

[3] Функция $f(x)$ является квазивогнутой, если множество $C(y) = \{x : f(x) \geq y\}$ является выпуклым для каждого y.

В том случае, если $\xi = 1$, говорят, что функция $f(x)$ является линейно однородной.

Важным следствием свойства однородности является теорема Эйлера, которая гласит, что для однородной функции $f(x)$ в любой точке области определения выполняется равенство:

$$f_1 \frac{x_1}{f} + \ldots + f_n \frac{x_n}{f} = \xi ,$$

где $f_i = \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}$, $i = 1, \ldots, n$.

Степень однородности производственной функции является одновременно показателем отдачи от масштаба (определение данного показателя дано ниже). Поэтому степень однородности больше единицы означает возрастающую отдачу от масштаба, меньше единицы – убывающую, в случае линейной однородности говорят о постоянной отдаче.

Важное следствие однородности состоит в том, что при неизменных ценах на факторы, оптимальная структура используемых в производстве ресурсов не меняется с расширением объема выпуска. Последнее утверждение может быть проиллюстрировано следующим образом.

Допустим, производитель решает оптимизационную задачу вида:

$$\begin{cases} C = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \to \min\limits_{x} \\ f(x) = \bar{y} \end{cases} \quad (1),$$

где p_i - цена ресурса вида i, $i = 1, \ldots, n$, C - издержки предприятия, $\bar{y}$ - целевой объем выпуска, а $f(x)$ - однородная степени ξ функция.

Задача (1) равносильна максимизации прибыли при заданном объеме выпуска. Предположим, оптимальный план используемых ресурсов составляет x^*, C^* - соответствующая ему функция издержек, $C^* = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^*$. Предположим, что планируемый объем выпуска увеличился на λ. Не решая повторно задачу (1) можно сразу сказать, что новый оптимальный план составляет $\tilde{x}^* = \lambda^{\frac{1}{\xi}} x^*$, а новая функция издержек - $\tilde{C}^* = \lambda^{\frac{1}{\xi}} C^*$. Т.е. степень однородности функции издержек равна $\frac{1}{\xi}$.

Необходимо также отметить, что однородная функция одновременно является гомотетичной. Для двухфакторного случая гомотетичность означает, что предельная норма технического замещения между факторами неизменна при фиксированности соотношения между этими факторами. Т.е. наклон изоквант постоянен вдоль каждого выходящего из начала координат луча.

1.2 Отдача от масштаба

Показатель «отдача от масштаба» характеризует эластичность выпуска по одновременному пропорциональному изменению всех факторов. Т.е. отдача на масштаб является измерителем того, на сколько процентов изменится выпуск при одновременном изменении объема каждого из используемых ресурсов на один процент. Математически это можно формализовать следующим образом:

$$\varepsilon = \frac{dy}{y} \bigg/ \frac{dx}{x},$$

где $\frac{dx_1}{x_1} = ... = \frac{dx_n}{x_n} = \frac{dx}{x}$.

Если $\varepsilon = 1$, имеет место постоянная отдача от масштаба, при $\varepsilon > 1$ - возрастающая, при $\varepsilon < 1$ - убывающая.

Характерной особенностью ряда производственных функций является независимость отдачи от масштаба от объема выпуска. Такое ограничение не всегда можно считать точно отражающим экономическую действительность. Неизменность отдачи от масштаба при росте выпуска влечет за собой монотонный характер функции средних издержек. Условие $\varepsilon = const$ фактически означает однородность соответствующей производственной функции. Можно показать, что для однородных производственных функций верно:

$$\frac{\partial C}{\partial y}\frac{y}{C} = \frac{1}{\xi}$$

(2),

где $C = C(y, p)$ - оптимальная функция издержек, полученная при решении оптимизационной задачи (1).

Заметим, что если решить дифференциальное уравнение (2) относительно C, мы получим:

$$C = ay^{\frac{1}{\xi}},$$

где a - константа интегрирования.

Отсюда получаем следующее выражение для средних издержек:

$$AC = ay^{\frac{1}{\xi}-1}.$$

При $\xi = 1$, т.е. для линейно однородных производственных функций, соответствующие им функции средних издержек не меняются с объемом выпуска. В том случае, если $\xi > 1$, т.е. при возрастающей отдаче от масштаба, функция средних издержек убывает с ростом выпуска, при убывающей отдаче – возрастает.

Монотонный характер функции средних издержек может оказаться достаточно жестким ограничением. В том случае, если функция средних издержек имеет U-образную форму, лежащую в основе технологию нельзя описывать однородными производственными функциями.

Более гибкие производственные функции (например, обобщенная производственная функция Реванкара и Зелнера (Zellner, Revankar, 1969)) предполагают, что отдача от масштаба является возрастающей только до определенного момента, после чего наблюдается противоположная тенденция убывающей отдачи от масштаба.

1.3 Эластичность замещения между факторами

Предыдущие два свойства описывали поведение производственной функции при одинаковом изменении всех факторов. Не меньший интерес представляет ситуация, когда факторы производства меняются в разной пропорции. Характер изменения производственной функции в данном случае зависит от того, в какой степени факторы являются взаимозаменяемыми.

Одним из показателей, характеризующих возможность замещения двух факторов производства, является предельная норма технического замещения MRS фактора x_i фактором x_j:

$$MRS_{ij} = -\left(\frac{dx_i}{dx_j}\right)_{\bar{y}} = \frac{f_j}{f_i}.$$

Предельная норма технического замещения показывает, на сколько надо изменить объем используемого фактора x_j при изменении объема фактора x_i на единицу для того, чтобы выпуск оставался неизменным. Недостатком данного показателя является то, что он зависит от единиц, в которых измеряются объемы применяемых ресурсов. С этой точки зрения более удобным является показатель эластичности замещения, который можно определить следующим образом:

$$\sigma_{12} = \frac{\partial\left(x_1/x_2\right)}{\partial MRS_{12}} \frac{MRS_{12}}{x_1/x_2},$$

(здесь σ_{12} - эластичность замещения фактора x_1 фактором x_2).

Эластичность замещения показывает, как изменится соотношение между факторами при изменении предельной нормы технического замещения между ними на один процент. Такое определение эластичности впервые было предложено Хиксом в 1932г. (Hicks, 1932). Хикс ввел данное определение для случая двух производственных факторов. Для более общего случая n производственных факторов определение эластичности является не столь однозначным.

В более поздней совместной работе Хикса и Аллена (Hicks, Allen, 1934) были предложены возможные обобщения показателя эластичности замещения на случай более чем двух факторов. Исходную формулу для двухфакторного случая можно применить к любым двум факторам многофакторной производственной функции в предположении о неизменности количества прочих факторов. В таком случае говорят об эластичности замещения по Хиксу (Hicks Elasticity of Substitution, HES). Недостаток данного показателя выявляется при рассмотрении производственной функции в контексте максимизации прибыли производителем. Оптимальное поведение производителя предполагает равенство предельной нормы технического замещения отношению цен соответствующих факторов, т.е.

$$MRS_{ij} = \frac{f_j}{f_i} = \frac{p_j}{p_i}.$$

Тогда определение эластичности может быть переписано следующим образом:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial\left(x_i/x_j\right)}{\partial\left(p_j/p_i\right)} \frac{p_j/p_i}{x_i/x_j}.$$

Т.е. при оптимальном поведении производителя эластичность показывает процентное изменение соотношения между факторами при изменении соотношения их цен на один процент. Поскольку оптимальный объем используемых ресурсов определяется производителем одновременно, на соотношение между двумя факторами производства оказывает влияние не только соотношение их цен, но и цены других факторов.

Для иллюстрации критической точки зрения на эластичность по Хиксу рассмотрим трехфакторную производственную функцию $f(x_1, x_2, x_3)$. Предельная норма замещения при оптимальном поведении производителя равна соотношению цен на факторы. Эластичность по Хиксу между первым и вторым фактором показывает, как меняется соотношение между факторами при изменении $MRS_{12} = \frac{p_2}{p_1}$ на 1% при фиксированности объема третьего фактора. В то же время, рассматриваемое изменение $\frac{p_2}{p_1}$ в общем случае может привести и к изменению объема используемого третьего фактора за счет изменения соотношения $\frac{p_2}{p_3}$ и $\frac{p_1}{p_3}$. Т.е. предположение о неизменности объема третьего фактора не всегда можно считать выполненным. Для функции Кобба-Дугласа и функции с постоянной эластичностью замещения (определение данных функций будет дано ниже) применение формулы HES корректно, поскольку изменение объема третьего фактора не влияет на соотношение первых двух. Однако в случае обобщенных производственных функций эластичность по Хиксу может давать искаженные результаты.

В качестве второго варианта измерения заменяемости между факторами Аллен и Хикс предложили частную эластичность замещения (partial elasticity of substitution). Данная концепция эластичности впоследствии более подробно изучалась Алленом и Узавой, в силу чего получила название эластичность замещения по Аллену и Узаве (Allen-Uzawa Elasticity of Substitution, AUES). AUES определяется следующим образом:

$$\sigma_{ij} = \frac{x_1 f_1 + ... + x_n f_n}{x_i x_j} \frac{F_{ij}}{F},$$

где

$$F = \det \begin{bmatrix} 0 & f_1 & \cdots f_n \\ f_1 & f_{11} & \cdots f_{1n} \\ & \cdots\cdots & \\ f_n & f_{n1} & \cdots f_{nn} \end{bmatrix},$$

$$f_{ij}(y, p) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j},$$

F_{ij} - алгебраическое дополнение элемента f_{ij} в определителе F.

В случае только двух факторов AUES сводится к эластичности по Хиксу.

Долгое время считалось, что AUES является логическим расширением оригинальной двухфакторной концепции эластичности на многофакторный случай, т.е. имеет примерно такую же смысловую нагрузку. Однако, как показали Блэкорби и Рассел в своей работе 1981г. (Blackorby, Russel, 1981), подобную интерпретацию нельзя считать корректной. На ряде очевидных примеров авторы продемонстрировали неинформативность показателя AUES. Например, если производственная функция построена таким образом, что между двумя факторами невозможно замещение, AUES не обязательно принимает нулевое значение.

В качестве альтернативы Блэкорби и Рассел предложили разработанную японским экономистом Моришимой (Morishima, 1967) концепцию эластичности. Эластичность по Моришиме (Morishima Elasticity of Substitution, MES) определяется следующим образом:

$$M_{ij}(y, p) = \frac{p_i C_{ij}(y, p)}{C_j(y, p)} - \frac{p_i C_{ii}(y, p)}{C_i(y, p)},$$

где $C(y, p)$ - оптимальная функция издержек, полученная при решении оптимизационной задачи (1), $C_i(y, p) = \frac{\partial C(y, p)}{\partial p_i}$, $C_{ij}(y, p) = \frac{\partial^2 C(y, p)}{\partial p_i \partial p_j}$.

В дальнейшем большая часть нашего анализа будет основываться на эластичности замещения по Хиксу. Данный показатель имеет наиболее прозрачную интерпретацию, и по-прежнему сохраняет роль универсального измерителя взаимозаменяемости между факторами.

Следующим важным моментом в теории замещения является возможность принятия эластичностью разных значений для разных пар факторов. Как показал Макфадден (McFadden, 1963) невозможно получить неоклассическую производственную функцию, которая обладает произвольным набором постоянных эластичностей замещения, если число факторов больше двух. Т.е. если мы предполагаем разные эластичности замещения для разных групп факторов, необходимо использовать другой класс функций, эластичности замещения в которых могут и не являться постоянными при разных объемах используемых факторов и их цен.

В то же время, очевидно, что в реальных экономических условиях не все используемые при производстве факторы являются взаимозаменяемыми. В том случае, если речь идет о труде и капитале, основных производственных факторах, очевидно, что в определенной мере они могут замещать друг друга. Однако при включении в производственную функцию дополнительных факторов, например, материалов, ситуация сильно осложняется. Так, материалы не могут являться заменителем ни труда, ни капитала в производственном процессе.

С одной стороны, данную проблему можно обойти следующим образом. Как отмечают Кобб и Дуглас в своей работе 1928г. (Cobb, Douglas, 1928), включение материалов как дополнительного фактора в производственную функцию не является целесообразным, поскольку труд и капитал в определенной мере уже участвуют в их производстве. Данный аргумент представляется весомым при рассмотрении производственной функции на макроуровне. Ситуация меняется, если анализируются производственные процессы отдельных предприятий. В таком случае материалы уже могут рассматриваться как независимый фактор производства, в том случае, если предприятие никак не участвует в их создании. Поэтому при оценке производственных функций на микроуровне проблема разной взаимозаменяемости между ресурсами представляется важной.

1.4 Поведение доли вознаграждения за труд в общем объеме номинального выпуска

Показатель «доля вознаграждения за труд в общем объеме номинального выпуска» определяется следующим образом:

$$S_2 = \frac{p_2 x_2}{p_0 y},$$

где x_2 объем используемых в производстве трудовых ресурсов, p_2 - ставка заработной платы, p_0 - цена производимого продукта, которую в дальнейшем анализе мы будем полагать равной 1, y - объем выпуска.

Данный показатель можно использовать для выявления очевидной неадекватности производственной функции в плане описания экономической реальности, а также для предварительного анализа данных. Так, функция Кобба-Дугласа предполагает неизменность доли вознаграждения труда, т.е. $S_2 = const$, что представляется жестким ограничением. Именно опираясь на анализ реального поведения доли вознаграждения труда, Эрроу, Солоу и др. (Arrow, Chenery, Minhas, Solow, 1961) вывели функцию с постоянной эластичности замещения.

2. Функциональные формы

Пионерной работой в области построения производственных функций является статья Кобба и Дугласа 1928г. (Cobb, Douglas, 1928). В данной работе впервые в явном виде была математически конкретизирована и эмпирически оценена связь между объемом выпуска и производственными факторами. Данная связь была получена путем подбора математической функции к имеющимся экономическим наблюдениям. Рассмотрев поведение индексов основного капитала, рабочей силы и производства, Кобб и Дуглас, пришли к выводу, что последний хорошо аппроксимируется с помощью формулы следующего вида:

$$y = A x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha},$$

где x_1 - индекс капитала, x_2 - индекс труда, A, α - некоторые параметры.

Функция Кобба-Дугласа является чрезвычайно удобным математическим инструментом для описания производственного процесса, что предопределило ее роль как одной из наиболее популярных производственных функций в прикладных экономических исследованиях. Однако данная функциональная форма неявно накладывает на моделируемый производственный процесс ряд ограничений, которые расцениваются большинством экономистов как чересчур жесткие. Ниже мы более подробно остановимся на этих ограничениях.

Схема построения более гибких функциональных форм в дальнейшем происходила по следующему сценарию. Исследователь концентрировал свое внимание на каком-то отдельном свойстве существующих производственных функций, которое, по его мнению, противоречит экономической реальности. Противоречия такого рода обычно доказываются эмпирически. После этого вносится предположение о том, как данное свойство должно вести себя в действительности. Из смоделированной таким образом отдельной характеристики производственной функции в дальнейшем математически выводится сама производственная функция. Так была построена получившее большое распространение CES-функция, обобщенная функция Леонтьева, обобщенная производственная функция Реванкара и Зелнера. Гораздо реже новая производственная функция предлагалась просто как некий математический инструмент, с дальнейшей проверкой его свойств.

Стоит отметить, что существует довольно много теоретических работ, в которых рассматриваются различные ослабления ограничивающих предпосылок функции Кобба-Дугласа. В то же время до сих пор не создано производственной функции, которая бы получила однозначное признание исследователей реального сектора и превзошла по популярности наиболее простые функции Кобба-Дугласа и CES. Объясняется это несколькими факторами. Во-первых, для обобщенных производственных функций «обобщение», как правило, относится к некоторым выборочным свойствам производственного процесса. При этом, как правило, остаются неизменными все остальные ограничивающие предпосылки. Поэтому каждый исследователь выбирает ту форму обобщения, которая устраняет ограничения наиболее, с его точки зрения, противоречащие экономической реальности. Во-вторых, за любое «обобщение» приходится платить возросшей сложностью математического инструментария. Функция может потерять такие важные свойства, как дифференцируемость, непрерывность, однородность, гомотетичность, т.е. перестать принадлежать к классу неоклассических. Это значительно затрудняет работу с такой функцией и ограничивает возможности построения на ее основе поведенческих математических моделей. В-третьих, обобщенные производственные функции требуют сложной техники эконометрического оценивания, что опять же требует дополнительных ограничивающих предпосылок.

В настоящем обзоре мы рассматриваем лишь некоторые функциональные формы, которые, по нашему мнению, представляют собой наиболее важные этапы в развитии теории производственных функций. В оставшейся части данного раздела поэтапно рассматриваются девять функциональных форм[4]. Наиболее подробный анализ мы проведем на примере функции Кобба-Дугласа с целью иллюстрации техники теоретической работы с производственной функцией. Для остальных функций в большинстве случаев приводятся лишь основные результаты.

2.1 Функция Кобба-Дугласа

Как известно, в своей работе Кобб и Дуглас предложили следующую функциональную форму для описания производственного процесса:

$$y = f(x_1, x_2) = Ax_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$$

В своих более поздних работах Дуглас снял предположение о равенстве единице сумме факторных эластичностей. Им использовалась функциональная форма вида:

$$y = f(x_1, x_2) = Ax_1^{\alpha} x_2^{\beta},$$

где сумма $\alpha + \beta$ необязательно равна 1.

Коэффициенты α и β можно интерпретировать как эластичности выпуска по факторам x_1 и x_2 соответственно:

$$\alpha = \frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{x_1}{y}, \ \beta = \frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{x_2}{y}.$$

Для принадлежности функции Кобба-Дугласа к классу неоклассических необходимо выполнение следующих условий для параметров: $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$.

[4] См., к примеру, (Бессонов, 2002)

Степень однородности производственной функции Кобба-Дугласа составляет $\alpha+\beta$, что легко показать следующим образом:

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2) = A x_1^{\alpha} x_2^{\beta} \lambda^{\alpha+\beta} = \lambda^{\alpha+\beta} f(x_1, x_2),$$

При $\alpha+\beta=1$ получаем линейно-однородную производственную функцию.

Для функции Кобба-Дугласа предельная норма технического замещения и эластичность замещения рассчитываются по формулам:

$$MRS_{12} = \frac{\partial f(x_1, x_2)/\partial x_2}{\partial f(x_1, x_2)/\partial x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{\beta}{\alpha}\frac{x_1}{x_2},$$

$$\sigma_{12} = \frac{\partial\left(x_1/x_2\right)}{\partial MRS_{12}} \cdot \frac{MRS_{12}}{x_1/x_2} = 1.$$

Таким образом, мы получаем известный факт единичной эластичности замены факторов для функции Кобба-Дугласа, который является одним из главных аргументов противников использования столь простой функциональной формы.

Эффект масштаба, как нетрудно показать, равен степени однородности и составляет $\alpha+\beta$:

$$\varepsilon = \frac{dy}{y} \Bigg/ \frac{dx}{x} = \alpha+\beta,$$

где $\frac{dy}{y} = \alpha\frac{dx_1}{x_1} + \beta\frac{dx_2}{x_2}$, $\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \frac{dx}{x}$.

Отдача от масштаба постоянна и не зависит от объема выпуска. В том случае, если $\alpha+\beta<1$, мы имеем убывающую отдачу от масштаба, $\alpha+\beta>1$ - возрастающую, и постоянную в случае $\alpha+\beta=1$.

Уравнение изокванты производственной функции Кобба-дугласа получается из выражения:

$$\bar{y} = A x_1^{\alpha} x_2^{\beta}.$$

Наклон изоквант определяется следующим образом:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$$

Из такого представления очевидно, что вдоль каждого луча, задаваемого отношением $\frac{x_2}{x_1}$, наклон изовкант одинаков и не зависит от объема выпуска. Т.е. можно сделать вывод о том, что функция Кобба-Дугласа принадлежит к классу гомотетичных производственных функций.

Рассмотрим теперь функцию Кобба-Дугласа в контексте максимизирующего прибыль поведения производителя. Будем предполагать для простоты анализа, что рынки факторов и конечного продукта являются совершенно конкурентными. Оптимизационная задача предстает в виде:

$$\pi = p_0 y - p_1 x_1 - p_2 x_2 \to \max_{x_1, x_2}.$$

Условия первого порядка на максимизацию прибыли в условиях совершенной конкуренции выглядят следующим образом:

$$p_0 \alpha \frac{y}{x_1} = p_1,$$

$$p_0 \beta \frac{y}{x_2} = p_2.$$

Откуда получаем, что доля вознаграждения фактора в общем объеме номинального выпуска постоянна и равна факторной эластичности:

$$\frac{p_1 x_1}{p_0 y} = \alpha, \ \frac{p_2 x_2}{p_0 y} = \beta.$$

Данный результат нередко используют для оценки параметров α и β. Также данный результат можно использовать для первичного анализа данных. Если доля вознаграждения фактора в общем объеме выпуска примерно постоянна, соответствующий производственный процесс можно описать с помощью производственной функции Кобба-Дугласа.

Из данного результата также очевидно, что в том случае, если $\alpha + \beta > 1$, вознаграждение факторов превышает стоимость произведенных товаров и прибыль становится отрицательной. Условие нулевой прибыли равносильно $\alpha + \beta = 1$, а положительная прибыль возможно только при $\alpha + \beta < 1$.

Решая систему условий первого порядка, мы получаем выражения для спроса на факторы производства:

$$x_1 = \left(\frac{y}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{p_2}{p_1}\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}},$$

$$x_2 = \left(\frac{y}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{p_1}{p_2}\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}},$$

откуда следует, что эластичности спроса на факторы по выпуску являются постоянными и не зависят от объема выпуска:

$$\frac{dx_1}{x_1}\bigg/\frac{dy}{y} = \frac{1}{\alpha+\beta}, \qquad \frac{dx_2}{x_2}\bigg/\frac{dy}{y} = \frac{1}{\alpha+\beta},$$

Условия второго порядка для вышеприведенной оптимизационной задачи предстают в виде:

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial x_1^2} = p_0 \alpha(\alpha-1)\frac{y}{x_1^2} < 0$$

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial x_2^2} = p_0 \beta(\beta-1)\frac{y}{x_2^2} < 0$$

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial x_1^2}\cdot\frac{\partial^2 \pi}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 \pi}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 = p_0^2 \alpha(\alpha-1)\beta(\beta-1)\frac{y}{x_1^2 x_2^2} > p_0^2 \alpha^2 \beta^2 \frac{y}{x_1^2 x_2^2}$$

Откуда получаем:

$0 < \alpha < 1,\ 0 < \beta < 1, \alpha + \beta < 1.$

Новым ограничением на параметры здесь является только: $\alpha + \beta < 1$. Отсюда можно сделать вывод, что условия максимизации прибыли в условиях совершенной конкуренции несовместимы с возрастающей отдачей от масштаба.

В заключении отметим, что столь подробный анализ можно провести только для функций, отвечающих условиям регулярности.

2.2 Функция с постоянной эластичностью замены между факторами (CES)

Функция CES была разработана Эрроу, Чинери, Минхасом и Солоу в 1961г. (Arrow, Chenery, Minhas, Solow, 1961). В своей статье авторы, которых для краткости обычно называют ACMS по первым буквам их фамилий, обратились к анализу эластичности производственных функций. Использовавшиеся в то время производственные функции, а именно функции Леонтьева[5] и Кобба-Дугласа, предполагали, что эластичность замещения между факторами принимает фиксированное числовое значение: в первом случае 0, во втором – 1. ACMS предположили, что такого рода ограничение является слишком жестким. С целью проверить состоятельность данных двух функций в плане описания экономической реальности, авторы эконометрически проанализировали поведение доли вознаграждения за труд в общем объеме номинального выпуска. В условиях фиксированных цен на факторы производства и выпускаемый продукт, как функция Леонтьева, так и функция Кобба-Дугласа предполагают, что данная доля постоянна и определяется исключительно параметрами производственной функции. Для функции Кобба-Дугласа такой вывод следует из условий максимизации прибыли предприятием, в случае функции Леонтьева фиксированное соотношение между факторами и выпуском является условием построения этой функции.

Логику, лежащую в основе опровержения эмпирической состоятельности функций Леонтьева и Кобба-Дугласа, математически можно проиллюстрировать следующим образом.

Неизменность доли вознаграждения труда для функции Кобба-Дугласа формально можно записать в виде:

$$\frac{p_2 x_2}{y} = \beta .$$

Здесь для простоты полагается, что цена на выпускаемый товар p_0 равна 1.

В логлинейной форме можно переписать приведенное выражение следующим образом:

$$\ln\left(\frac{y}{x_2}\right) = a + \ln(p_2) \qquad (3),$$

[5] Функция Леонтьева для двух факторов производства выглядит следующим образом: $f(x) = \min\left\{\frac{x_1}{b_1}, \frac{x_2}{b_2}\right\}$, где b_1, b_2 - некоторые параметры. Более подробно о данной функции будет сказано ниже.

где $a = \ln\left(\frac{1}{\beta}\right)$.

Для функции Леонтьева соотношение между факторами задается производственным процессом и не подвержено влиянию цен, т.е.:

$$\frac{x_2}{y} = \gamma .$$

Вновь линеаризуя, получаем:

$$\ln\left(\frac{y}{x_2}\right) = a ,$$

где $a = \ln\left(\frac{1}{\gamma}\right)$.

Таким образом, оценивая уравнения вида:

$$\ln\left(\frac{y}{x_2}\right) = c + b\ln(p_2) + \varepsilon \qquad (4),$$

где ε - случайная ошибка, можно эконометрически проверить гипотезы о равенстве коэффициента b при логарифме заработной платы нулю и единице. Проделав эту процедуру для выборки, включающей данные по 24 отраслям из 19 стран, ACMS пришли к выводу, что в большинстве случаев гипотезы вида $b = 0$ и $b = 1$ отвергаются.

В связи с такими результатами встал вопрос о построении функциональной формы, допускающей более гибкое поведение доли вознаграждения факторов. Большая гибкость заключается в том, что коэффициент b в выражении:

$$\ln\left(\frac{y}{x_2}\right) = a + b\ln(p_2) \qquad (5)$$

может принимать любые значения, а не только 0 и 1.

Именно из выражения (5) при отсутствии ограничений на коэффициент b можно получить функцию CES. Для этого перейдем к следующим обозначениям:

$$k = \frac{x_1}{x_2}\,,\ g(k) = \frac{f(x_1, x_2)}{x_2}\,,\ \frac{df}{dx_2} = g - k\frac{dg}{dk}\,.$$

Здесь $f(x_1, x_2)$ - это искомая производственная функция, обладающая свойством однородности и постоянной отдачи от масштаба.

Выражение (5) можно теперь переписать в виде:

$$\ln(g) = \ln(a) + b\ln(g - k\frac{dg}{dk})\,,$$

или же

$$g = a(g - k\frac{dg}{dk})^b\,.$$

В свою очередь последнее выражение можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{dg}{g - \beta g^{1/b}} = \frac{dk}{k} \qquad (6),$$

где $\beta = a^{-1/b}$.

Решая дифференциальное уравнение (6), получаем:

$$g^\theta = \frac{k^\theta c_1^\theta}{1 + \beta k^\theta c_1^\theta} \qquad (7),$$

где c_1 - константа интегрирования, а $\theta = \frac{1-b}{b}$.

Возвращаясь к исходному виду производственной функции и факторов, получаем следующее выражение для $f(x_1, x_2)$:

$$f(x_1, x_2) = (\alpha x_1^{-\theta} + \beta x_2^{-\theta})^{-1/\theta}$$

(8),

где $\alpha = c_1^{-\theta}$.

Переобозначив переменные, можно преобразовать данную функцию к более традиционному виду:

$$f(x_1, x_2) = \gamma(\delta x_1^{-\theta} + (1-\delta) x_2^{-\theta})^{-1/\theta}$$

(9),

где $\alpha + \beta = \gamma^{-\theta}$, $\alpha\gamma^{\theta} = \delta$.

Для того чтобы CES функция попадала в класс неоклассических, необходимо соблюдение следующих ограничений на параметры: $0 < \delta < 1$, $\gamma > 0$, $\theta > -1$.

Функция CES является линейно-однородной, в результате чего отдача от масштаба является постоянной и равной единице. Эластичность замены факторов составляет $\frac{1}{\theta + 1}$.

В силу того, что наклон изоквант в двухфакторном случае является постоянным вдоль каждого выходящего из начала координат луча, CES-функция принадлежит к классу гомотетичных.

Важное свойство CES-функции состоит в том, что она содержит в качестве частных случаев функцию Кобба-Дугласа, Леонтьева и линейную производственную функцию. Данные функция получаются из функции CES соответственно при $\theta = 0$, $\theta \to \infty$, $\theta \to -1$. В общем, по мере убывания θ, степень взаимозаменяемости между факторами увеличивается.

Из условий максимизации прибыли в условиях совершенной конкуренции получаем, что поведение доли вознаграждения труда описывается следующим образом:

$$S_2 = \frac{\beta}{\alpha\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)^{-\theta} + \beta},$$

что является более сложной зависимостью, чем в случае функции Кобба-Дугласа.

Ограничения, накладываемые условиями максимизации прибыли второго порядка не дают ничего нового по сравнению с условиями принадлежности функции к классу неоклассических.

Функция CES применяется в том случае, когда отсутствует точная информация об уровне взаимозаменямости производственных факторов и вместе с тем есть основания предполагать, что этот уровень существенно не изменяется при изменении объемов вовлекаемых ресурсов. Иными словами, экономическая технология обладает определенной устойчивостью по отношению к пропорциям факторов.

Необходимо сказать несколько слов о расширении CES-функции на многофакторный случай. Простым обобщением многофакторную CES-функцию записывают как:

$$y = f(x_1, ..., x_n) = \gamma(\delta_1 x_1^{-\theta} + ... + \delta_n x_n^{-\theta})^{-\frac{1}{\theta}}$$

Данная функция имеет постоянные эластичности замещения и по Хиксу, и по Аллену-Узаве. Однако необходимо отметить следующее. Как было показано выше, в двухфакторном случае CES-функция выводится из предположения о постоянстве эластичности замещения между факторами. В то же время предположение о том, что и HES и AUES являются постоянными, вовсе не влечет за собой получение CES-функции. Данную функцию можно получить лишь из предположения о том, что MES является постоянной и одинаковой для всех групп факторов. Данный факт сторонники концепции MES считают главным свидетельством в пользу того, что именно эластичность Моришимы является логическим продолжением двухфакторной эластичности на многомерный случай.

2.3 Функция Мукерджи

Интересный вариант обобщенной производственной функции был предложен Мукерджи (Mukerji) в 1963г. Данная функция является обобщением CES-функции и выглядит следующим образом:

$$y = \gamma\left(\sum_{i=1}^{n} \delta_i x_i^{-\theta_i}\right)^{-1/\theta}.$$

В том случае, если не соблюдается условие $\theta_1 = ... = \theta_n$, данная функция не является однородной.

Эластичность замещения между факторами x_i и x_j для функции Мукерджи выглядит следующим образом:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2\theta_i - \theta_j + 1}$$

Таким образом, эластичности замещения между факторами у данной функции не являются одинаковыми для разных пар факторов. Очевидно, если у нас есть фактор x_i, который может быть заменен другими производственными факторами лишь в очень ограниченном масштабе, соответствующий коэффициент θ_i должен иметь достаточно большое значение. При этом свойство слабой взаимозаменяемости может быть проверено статистически, а не накладываться в виде дополнительного ограничения.

Еще одним отличием данной функции является сложный характер поведения отдачи от масштаба, которая зависит от объема выпуска и производственных факторов.

$$\frac{dy}{y}\Big/\frac{dx}{x}=\frac{y^{\theta}}{\gamma^{\theta}\theta}(\theta_1\delta x_1^{-\theta_1}+\theta_2(1-\delta)x_2^{-\theta_2}).$$

Доля вознаграждения за труд в отличие от классической CES-функции не является постоянной при неизменном соотношении факторов, что видно из соотношения:

$$S_2=\frac{\theta_2}{\frac{\delta}{(1-\delta)}\frac{x_1^{-\theta_1}}{x_2^{-\theta_2}}+1}.$$

2.4 Негомотетичная функция CES

В своей работе 1977г. Сато (Sato) заметил, что такое свойство CES-функции как гомотетичность плохо согласуется с экономической реальностью.

Для CES-функции при условии максимизации прибыли и конкурентных рынках соотношение между используемыми производственными факторами зависит только от предельной нормы замещения или же соотношения цен и не зависит от объема выпуска. Это можно проиллюстрировать следующим образом. Для максимизирующего прибыль предприятия соблюдается равенство предельной нормы замещения отношению цен:

$$MRS_{12}=\frac{\partial f(x_1,x_2)/\partial x_2}{\partial f(x_1,x_2)/\partial x_1}=\frac{1-\delta}{\delta}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\theta+1}=\frac{p_2}{p_1},$$

Принимая во внимание тот факт, что $\sigma_{12} = \dfrac{1}{\theta+1}$, можно получить:

$$\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \ln a + \sigma \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) \qquad (10),$$

где $a = \dfrac{\delta}{1-\delta}\dfrac{1}{\theta+1}$.

Как отметил Сато, в реальности соотношение между факторами могут колебаться достаточно сильно даже при неизменном соотношении цен. Этот факт свидетельствует о необходимости ослабления предпосылки гомотетичности.

С этой целью Сато предложил класс NH-CES-функций, т.е. негомотетичных функций с постоянной эластичностью замещения. Для этих функций условие (10) должно выглядеть следующим образом:

$$\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \ln a + \sigma \ln\left(MRS_{12}\right) + b\ln\left(y\right) + c\ln\left(T(t)\right) \qquad (11),$$

т.е. отношение производственных факторов для таких функций зависит от объема выпуска, а также от индекса технического прогресса $T(t)$.

Наиболее специфичной чертой класса негомотетичных функций является то, что предельная норма замещения MRS не является постоянной, а меняется с объемом выпуска даже при постоянстве соотношения факторов. С экономической точки зрения такое поведение предельной нормы замещения имеет следующее обоснование. По мере роста объема производства относительная значимость факторов может меняться. Так, при расширении производства на предприятии все большее значение может приобретать человеческий фактор, в частности, качество управления. В результате меняется форма изоквант и их наклон при одном и том же соотношении факторов.

Примерами NH-CES-функций могут являться негомотетичные функции Кобба-Дугласа и CES. Негомотетичная CES-функция неявно задается следующим соотношением:

$$C_1(y)x_1^{-\theta} + C_2(y)x_2^{-\theta} = 1,$$

где $C_1(y)$ и $C_2(y)$ - монотонные функции.

Аналогичным образом может быть задана негомотетичная функция Кобба-Дугласа:

$$C_1(y)\ln(x_1) + C_2(y)\ln(x_2) = 1.$$

Более удобным общим представлением для NH-CES является следующее:

$$x_1^{-\theta} + C(y)x_2^{-\theta} = H(y),$$

где $C(y)$ и $H(y)$ являются монотонными функциями от объема выпуска.

Предельная норма замещения для такой функции предстает в виде:

$$MRS_{12} = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\theta+1} C(y).$$

Долю вознаграждения фактора «труд» можно представить следующим соотношением:

$$S_2 = \frac{\theta x_2^{-\theta} C(y)}{y(C'(y)x_2^{-\theta-1} - H'(y))}$$

Таким образом, двумя ключевыми свойствами класса негомотетичных функций является меняющиеся с объемом выпуска предельная норма замещения и доля вознаграждения труда.

Отдача от масштаба для NH-CES не является неизменной и выглядит следующим образом:

$$\frac{dy}{y}\Big/\frac{dx}{x} = -\frac{\theta H(y)}{y(C'(y)x_2^{-\theta} - H'(y))},$$

где $H'(y) = \dfrac{\partial H(y)}{\partial y}$

2.5 Транслогарифмическая функция

Транслогарифмическая функция была предложена Кристинсеном, Джоргенсоном и Ло (Christensen, Jorgenson, Lau) в 1973г. Данные авторы обратили внимание на то, что в многофакторном случае одинаковая эластичность замены между всеми парами факторов, как это предполагается в случае функции Кобба-

Дугласа и CES, является очень жестким ограничением. С целью преодолеть это затруднение Кристинсен, Джоргенсон и Ло разработали более гибкую функциональную форму.

Идея построения транслогарифмической функции выглядит следующим образом. Предполагается, что выпуск предприятия зависит от объема используемых факторов ($y = f(x)$), однако точный вид зависимости нам неизвестен. Тогда логарифм выпуска зависит от логарифма производственных ресурсов, что очевидно из представления:

$$\ln(y) = \ln f(e^{\ln(x)}) = g(\ln(x)) .$$

Раскладывая неизвестную нам функцию $g(\cdot)$ в ряд Тейлора до второго члена в точке 1, мы получает транслогарифмическую функцию вида:

$$\ln y = \ln \gamma_0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ln x_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} \ln x_i \ln x_j \ ,$$

где $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$ по теореме о независимости значения смешанной производной от порядка дифференцирования.

Можно отметить два основных недостатка данной производственной функции. Во-первых, проблемным моментом при работе с данной функциональной формой является неопределенность логарифма в точке 0. В результате транслогарифмическая функция может быть использована только для такого набора факторов, ни один из которых не принимает нулевые значения.

Во-вторых, данная функция служит приближением некой неизвестной производственной функции в окрестности точки (1,...,1). Очевидно, что если значения факторов не попадают в эту окрестность, работать с данной функцией уже нельзя.

Очевидно, что транслогарифмическая функция не является ни однородной, ни гомотетичной.

Для того чтобы транслогарифмическая функция удовлетворяла первым двум условиям неоклассической производственной функции, необходимо чтобы все параметры были положительны.

Рассмотрим транслогарифмическую производственную функцию для случая двух факторов производства:

$$\ln y = \ln\gamma_0 + \alpha_1 \ln x_1 + \alpha_2 \ln x_2 + \frac{1}{2}\beta_1(\ln x_1)^2 + \frac{1}{2}\beta_2(\ln x_2)^2 + \gamma_1 \ln x_1 \ln x_2$$

Эластичность замещения между факторами в двухфакторном случае имеет вид:

$$\sigma_{12} = \frac{AB}{AB + (\gamma_1 - \beta_2)B + (\gamma_1 - \beta_1)A},$$

где $A = \alpha_2 + \beta_2 \ln x_2 + \gamma_1 \ln x_1$, $B = \alpha_1 + \beta_1 \ln x_1 + \gamma_1 \ln x_2$.

Т.е. для такой функции эластичность, во-первых, не является постоянной, а зависит от объема используемых факторов, и, во-вторых, может принимать разные значения для различных пар факторов. Однако следует отметить, что при работе с транслогарифмической производственной функцией невозможна нулевая эластичность замены между факторами.

Отдача от масштаба для транслогарифмической функции не является неизменной и меняется вместе с объемом используемых факторов:

$$\varepsilon = (\alpha_1 + \alpha_2) + (\beta_1 + \gamma_1)\ln x_1 + (\beta_2 + \gamma_1)\ln x_2$$

Отдача от масштаба становится постоянной только в том случае, если $\beta_1 = \beta_2 = -\gamma_1$.

Доля вознаграждения на труд для транслогарифмической функции может быть записана с учетом вышеприведенных обозначений в следующем виде:

$$S_2 = \frac{p_1 x_1}{y}\frac{A}{B}.$$

Таким образом, очевидно, что транслогарифмическая функция накладывает минимальное число ограничений на технические характеристики описываемого производственного процесса. В силу этого данная функциональная форма может быть использована для формальной проверки гипотез об адекватности некоторых ограничений, которые используются в других производственных функциях, таких как постоянство эффекта масштаба и эластичности замещения.

2.6 Функция с переменной эластичностью замещения

Как и предыдущие авторы, американский экономист Реванкар (Revankar) считал предположение о постоянстве эластичности замещения жестким ограничением, которое может привести к неправильной спецификации производственной функции. По его мнению, гораздо вероятнее ситуация, когда эластичность меняется при изменении объема выпуска и используемых факторов.

Более корректным способом построения производственной функции, с точки зрения Реванкара, является задание функциональной формы для эластичности замещения, что в свою очередь позволяет определить саму производственную функцию. При выборе функциональной формы для описания поведения эластичности Реванкар предлагает руководствоваться следующими критериями. Во-первых, сама функция эластичности и полученная на ее основе производственная функция должны иметь адекватную экономическую интерпретацию. Во-вторых, выбранная функция эластичности не должна приводить к чрезмерному усложнению эконометрической техники оценивания.

Рассматривая только двухфакторный случай, Реванкар предполагает, что эластичность линейно зависит от соотношения факторов:

$$\sigma_{12} = 1 + \beta \frac{x_1}{x_2},$$

где β - некий параметр.

Отвечающую такому виду эластичности производственную функцию Реванкар предложил назвать функцией с переменной эластичностью замещения (VES).

Очевидно, что при $\beta = 0$, мы имеем дело с функцией Кобба-Дугласа. Важно отметить, что VES-функция не может быть преобразована в функцию CES ни при каком значении параметров.

Производственная функция, отвечающая вышеприведенному виду поведения эластичности, выглядит следующим образом:

$$V = \gamma x_1^{\alpha(1-\delta\rho)} \left[x_2 + (\rho - 1)x_1 \right]^{\alpha\delta\rho},$$

где γ, α, δ, ρ - параметры.

Сама эластичность в таком представлении принимает вид:

$$\sigma_{12} = 1 + \frac{\rho - 1}{1 - \delta\rho} \frac{x_1}{x_2},$$

где $\frac{\rho - 1}{1 - \delta\rho} = \beta$.

Условия неоклассической функции предполагают:

$\alpha > 0$, $0 < \delta < 1$, $0 \le \delta\rho \le 1$, $\gamma > 0$,

а необходимость принятия эластичностью только положительных значений выливается в дополнительное условие $\frac{x_2}{x_1} > \left(\frac{1-\rho}{1-\delta\rho}\right)$.

При $\rho = 1$ VES преобразуется в производственную функцию Кобба-Дугласа, а при $\rho = \frac{1}{\delta}$ - в линейную.

Ключевое отличие между функциями CES и VES состоит в том, что если для первой эластичность постоянна в каждой точке изокванты, для последней эластичность постоянна лишь для каждого выходящего из начала координат луча, но может меняться при движении вдоль одной изокванты.

Экономический смысл здесь состоит в том, что при изменении пропорции используемых факторов производства, может меняться и эластичность замещения между ними. Такая ситуация возможна, например, если рост одного из ресурсов связан с общим расширением производства и усложнением технологических процессов. В результате могут появиться дополнительные возможности комбинировать ресурсы, что в итоге увеличит эластичность замещения.

Отдача от масштаба функции VES, как нетрудно показать, равна α и не зависит от объема выпуска. Таким образом, в данном случае ослабление ограничения, связанного с постоянством эластичности, не привело к устранению ограничения на неизменность отдачи от масштаба.

2.7 Обобщенная производственная функция

Один из способов обобщения производственных функций был предложен Зелнером и Реванкаром (Zellner, Revankar, 1969). Суть данного метода заключается в том, что производственная функция представляется в виде:

$y = V = g(f)$,

где g - некая монотонная функция, а f - однородная производственная функция, как правило, одна из классических. Своей целью Зелнер и Реванкар ставили получение производственной функции, отдача от масштаба для которой не является неизменной. Задавая отдачу от масштаба как функцию от объема выпуска, можно вывести функцию g как решение дифференциального уравнения.

Важным свойством обобщенной производственной функции является то, что эластичность замещения между факторами для функции V такая же, как и для функции f. Т.е. после применения монотонного преобразования g к классической производственной функции, такая ее характеристика как эластичность остается неизменной. Поэтому в том случае, если мы хотим получить обобщенную производственную функцию в смысле более гибкой эластичности замещения, например, меняющейся с течением времени, нужно искать другие способы обобщения.

Рассмотрим более подробно механизм построения обобщенной производственной функции.

Пусть $f(x_1, x_2)$ - неоклассическая производственная функция, степень однородности которой составляет α_f. Определим отдачу от масштаба функции V следующим образом:

$$\alpha(V) = \frac{dV}{V} \Big/ \frac{dx}{x}$$

(12),

где $\frac{dx}{x} = \frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2}$.

Т.е. мы заранее предполагаем, что отдача от масштаба меняется с изменением объема выпуска.

Поскольку $f(x_1, x_2)$ является однородной степени α_f, для нее выполняется уравнение Эйлера:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{x_1}{f} + \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{x_1}{f} = \alpha_f .$$

Откуда получаем, что отдача от масштаба для данной функции также равна α_f:

$$\alpha^f = \frac{df}{f} \Big/ \frac{dx}{x}$$

(13).

Сопоставляя выражения (12) и (13) мы получаем следующее выражение:

$$\frac{dV}{df} = \frac{V}{f}\frac{\alpha(V)}{\alpha^{f}} \tag{14}$$

Задав конкретный вид функции отдачи от масштаба $\alpha(V)$, мы можем получить функцию V как решение дифференциального уравнения (14).

Например, можно задать функцию $\alpha(V)$ следующим образом:

$$\alpha(V) = \alpha_f \left(1 - \frac{V}{\bar{y}}\right)$$

(15),

где $\bar{y}$ - некоторый фиксированный объем выпуска. В данном случае отдача от масштаба убывает по мере роста выпуска, когда производство достигает пороговой величины $\bar{y}$, отдача от масштаба становится нулевой.

При задании функции отдачи от масштаба в виде (15), дифференциальное уравнение (14) принимает вид:

$$\frac{dV}{df} = \frac{V}{f}\left(1 - \frac{V}{\bar{y}}\right)$$

(16).

Решая (16), получаем:

$$V = \frac{\bar{y}f}{1+f}$$

(17).

В качестве другого варианта функциональной формы для отдачи от масштаба можно взять:

$$\alpha(V) = \alpha^{f}\left(\gamma + \frac{\beta}{f}\right)$$

(18).

В таком случае решение дифференциального уравнения (14) дает следующее выражение для обобщенной производственной функции:

$$V = Cf^{\gamma}e^{-\frac{\beta}{f}}$$

(19),

где C - константа интегрирования.

2.8. Обобщенная производственная функция Леонтьева

Основная особенность обобщенной производственной функции Леонтьева состоит в том, что она позволяет моделировать производственный процесс, между некоторыми ресурсами которого невозможно замещение. Из перечисленных выше производственных функций лишь функция Мукерджи может иметь эластичность замещения между двумя какими-то факторами стремящуюся к нулю. Однако это достигается за счет практически полного нивелирования влияния одного из факторов на выпуск.

Очевидным примером производственной функции, позволяющей эластичности замещения принимать нулевые значения является функция затраты - выпуск или функция Леонтьева (Leontief, 1941).

$$f(x) = \min\left\{\frac{x_1}{b_1}, \ldots, \frac{x_n}{b_n}\right\},$$

где $b_1,..,b_n$ - некоторые параметры.

Однако данная функция предполагает нулевую эластичность замещения между всеми факторами производства, что опять же не отвечает в полной мере экономической реальности.

В 1971г. Дьюверт (Diewert), основываясь на теории двойственности между функцией издержек и производственной функцией, вывел обобщенную производственную функцию Леонтьева. Главное достоинство данной функции состоит в возможности существования разной эластичности замещения между различными парами факторов производства, причем не исключается и полное отсутствие взаимозаменяемости.

Обобщенная производственная функция Леонтьева не имеет компактного математического представления, поэтому для ее оценки используются уравнения спроса на факторы. Для получения данной функции используется следующая логика. Задается некая функциональная форма для оптимальной функции издержек предприятия. Оптимальность функции издержек определяется тем, что она получена в ходе решения предприятием оптимизационной задачи следующего вида:

производство заданного объема выпуска с минимальными издержками. На основе имеющегося решения этой задачи в виде заданной функции издержек восстанавливается лежащая в основе производственная функция.

Математически вышеприведенные рассуждения можно проиллюстрировать следующим образом. Дьюверт предполагает, что в качестве решения следующей оптимизационной задачи:

$$\begin{cases} C = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \to \min\limits_{x} \\ \bar{y} \le f(x_1, ..., x_n) \end{cases}, \tag{20}$$

предприятие получает функцию издержек следующего вида:

$$C(y, p) = h(y) \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} p_i^{1/2} p_j^{1/2} ,$$

где p_i - цены факторов производства, $p_i \ge 0$, $B = \left(b_{ij}\right)$ - симметричная матрица коэффициентов ($b_{ij} = b_{ji} \ge 0$), а $h(y)$ - непрерывная монотонно возрастающая функция, причем $h(0) = 0$.

Используя лемму Шепарда можно получить следующие выражения для спроса на факторы производства:

$$x_i(y, p) = \frac{\partial C(y, p)}{\partial p_i} = h(y) \sum_{j=1}^{n} b_{ij} p_j^{1/2} p_i^{-1/2} .$$

Зная объем используемых факторов, их цены и величину издержек можно оценить параметры производственной функции B.

Для того чтобы получить производственную функцию в явном виде, Дьюверт предлагает следующую логику рассуждений. Для начала определим множество $L(y)$ следующим образом: $L(y) = \left\{x : f(x) \ge y,\ x \ge \bar{0}\right\}$, где $\bar{0}$ - нулевой вектор-столбец. В таком определении $L(y)$ является множеством производственных возможностей, т.е. $L(y)$ включает только такие наборы факторов, использование которых приведет к производству конечного продукта в объеме, не меньше заданного y.

Поскольку $C(y, p)$ получена как решение оптимизационной задачи (20), для любого вектора x из множества $L(y)$ справедливо соотношение:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \geq h(\bar{y}) \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} p_i^{1/2} p_j^{1/2} \qquad (21).$$

Зафиксируем какой-либо вектор x из множества $L(y)$ и найдем максимальное значение y, для которого неравенство (21) продолжает выполняться. Оптимизационная задача (20) примет вид:

$$\begin{cases} y \to \max \\ \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \geq h(y) \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} p_i^{1/2} p_j^{1/2} \end{cases}$$

(22)

Решением этой задачи будет y как функция от x, которая и будет являться искомой производственной функцией.

Поскольку $h(y)$ - непрерывная монотонно возрастающая функция от y, задачу (22) можно представить в виде:

$$\begin{cases} h(y) \to \max \\ \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \geq h(y) \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} p_i^{1/2} p_j^{1/2} \end{cases}$$

(23)

Монотонность и возрастающий характер функции $h(y)$ позволяет нам перейти к замене переменных следующего вида: $\mu = 1/h(y)$, и итоговая оптимизационная задача примет вид:

$$\begin{cases} \mu \to \min \\ \mu \geq \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} p_i^{1/2} p_j^{1/2}}{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i} \end{cases} \qquad (24)$$

Введем переменную: $t_i = p_i^{1/2} x_i^{1/2}$, $i = 1,...,n$. Тогда $p_i^{1/2} = t_i x_i^{-1/2}$ для каждого x_i и (24) можно записать как:

$$\begin{cases} \mu \to \min \\ \mu \ge \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i^{-1/2} b_{ij} x_j^{-1/2} t_i t_j}{\sum_{i=1}^{n} t_i^2} \end{cases}$$

Тогда максимальное значение выражения $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i^{-1/2} b_{ij} x_j^{-1/2} t_i t_j}{\sum_{i=1}^{n} t_i^2}$ составляет $\bar{\mu}$, где $\bar{\mu}$ - максимальное собственное число матрицы $\dot{X}B\dot{X}$, где $\dot{X}$ - диагональная $n \times n$ матрица, элемент с номером ii для которой равен $x_i^{-1/2}$.

Поскольку функция $h(y)$ является монотонной и возрастающей, $h(0) = 0$, существует обратная функция h^{-1}, тогда $y = h^{-1}(h(y))$. В итоге наша искомая производственная функция может быть записана как:

$$y = h^{-1}(1/\bar{\mu}).$$

В предположении о том, что $h(y) = y$ и $b_{ij} = 0$ для всех $i \ne j$, наша производственная функция принимает вид:

$$y(x_1,...,x_n) = 1/\bar{\mu} = 1/\max_i (b_{ii}/x_i) = \min_i \frac{x_i}{b_{ii}},$$

т.е. сводится к обычной производственной функции Леонтьева.

Наиболее отвечающей экономической реальности нам представляется трехфакторная производственная функция, где только два фактора являются взаимозаменяемыми. Обозначим через x_1 фактор, который не может быть заменен другими в процессе производства, а x_2 и x_3 - два прочих фактора.

Функции спроса на факторы имеют вид:

$$x_i = h(y)\left[b_{ii} + \sum_{\substack{j=1, \\ j \ne i}}^{3} b_{ij} \left(\frac{p_j}{p_i} \right)^{1/2} \right]$$

Поскольку x_1 не может быть заменен в процессе производства никаким другим фактором, функция спроса на x_1 может быть представлена в виде:

$x_1 = h(y)b_{11}$, $b_{12} = b_{13} = 0$.

Т.е. объем используемого фактора x_1 определяется некими технологическими характеристиками и объемом производства.

Производственная функция в таких условиях выглядит следующим образом:

$$y = h^{-1}\left[\min\left\{\frac{x_1}{b_{11}}, G_1(x_2,x_3), G_2(x_2,x_3)\right\}\right], \text{ где}$$

$$G_1(x_2,x_3) = \frac{2x_2x_3}{b_{33}x_2 + b_{22}x_3 - \left(b_{33}^2x_2^2 + b_{22}^2x_3^2 - 2x_2x_3(b_{22}b_{33} - 2b_{23}^2)\right)^{1/2}},$$

$$G_2(x_2,x_3) = \frac{2x_2x_3}{b_{33}x_2 + b_{22}x_3 + \left(b_{33}^2x_2^2 + b_{22}^2x_3^2 - 2x_2x_3(b_{22}b_{33} - 2b_{23}^2)\right)^{1/2}}.$$

Нетрудно заметить, что при $b_{23} = 0$, $G_1(x_2,x_3) = \frac{x_2}{b_{22}}$, $G_2(x_2,x_3) = \frac{x_3}{b_{33}}$, т.е. мы опять приходим к обычной производственной функции Леонтьева.

Уравнения спроса на два оставшихся фактора принимают вид:

$$x_2 = h(y)\left[b_{22} + b_{23}\left(\frac{p_3}{p_2}\right)^{1/2}\right]$$

$$x_3 = h(y)\left[b_{33} + b_{23}\left(\frac{p_2}{p_3}\right)^{1/2}\right].$$

Для того чтобы получить примерное представление о виде изоквант, преобразуем два вышеприведенных выражения с целью исключения соотношения цен $\left(\frac{p_3}{p_2}\right)$. Получаем:

$$\left(\frac{x_2}{h(y)} - b_{22}\right)\left(\frac{x_3}{h(y)} - b_{33}\right) = b_{23}^2 \qquad (25).$$

Очевидно, что при $x_2 \to h(y)b_{22}$, $x_3 \to \infty$, а при $x_3 \to h(y)b_{33}$, $x_2 \to \infty$.

Из выражения (25) можно определить наклон изокванты. Взяв полный дифференциал, получаем:

$$-\frac{dx_2}{dx_3}=\frac{x_2-h(y)b_{22}}{x_3-h(y)b_{33}}$$
(26).

Выражение (26) является предельной нормой замещения фактора 3 фактором 2. Эластичность замещения между данными двумя факторами задается выражением:

$$\sigma_{23}=\frac{(x_2-h(y)b_{22})(x_3-h(y)b_{33})}{2x_2x_3-x_2h(y)b_{33}-x_3h(y)b_{22}}$$
(27).

Заметим, что если $b_{23}=0$, $x_2=h(y)b_{22}$, $x_3=h(y)b_{33}$ и $\sigma_{23}=0$.

Обобщенная производственная функция Леонтьева не принадлежит к классу неоклассических, не является она также однородной и гомотетичной.

Отдача от масштаба ε такой функции в двухфакторном случае определяется выражением:

$$\varepsilon=\frac{h(y)}{y}\Big/\frac{dh(y)}{dy}.$$

В том случае, если y - степенная функция x, обобщенная производственная функция Леонтьева обладает постоянной отдачей от масштаба. Так, если $h(y)=y^{\tau}$, $\varepsilon=\frac{1}{\tau}$.

Заключение

В настоящей работе нами были проанализированы некоторые свойства различных производственных функций, в частности, были рассмотрены основные характеристики производственных функций, а также функциональные формы, часто используемые при декомпозиции экономического роста. Одним из ключевых моментов при построении эмпирических производственных функций является выбор функциональной формы с учетом предпосылок и ограничений, связанных с использованием той или иной функциональной формы для моделирования экономической реальности. Основная цель проведенного обзора заключается в выявлении и описании возможных ограничений, связанных с использованием различных видов производственных функций.

Литература

1. Abramovitz, Moses, “Resource and Output Trends in the United States since 1870”, American Economic Review, Vol.46, №2 (May, 1956), 5-23
2. Aghion, Philippe, and Peter Howitt. “A Model of Growth Through Creative Destruction,” Econometrica, 60(2), 1992, 323-351
3. Aigner D., Chu S. “On Estimating the Industry Production Function”, The American Economic Review, Vol.58, № 4, 1968
4. Allen R., Hicks J. “A Reconsideration of the Theory of Value. Part 2. A Mathematical Theory of Individual Demand Functions”, Economica, Vol.1, № 2, 1934
5. Arrow K., Chenery H., Minhas B., Solow R. “Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency”, The Review of Economics and Statistics, Vol.43, № 3, 1961
6. Baily, Martin N., “Productivity Growth and Materials Use in U.S. Manufacturing”, *The Quarterly Journal of Economics*, Vol. 101, №1 (Feb., 1986), pp. 185-196.
7. Baily, Martin N., Charles R.Hulten, David Campbell, “Productivity Dynamics in Manufacturing Plants”, Brookings Papers on Economic Activity, Microeconomics, 1992, 187-249.
8. Baily, Martin Neil, Charles Hulten and David Campbell. “Productivity Dynamics in Manufacturing Plants,” Brookings Papers on Economic Activity: Microeconomics, 1992, 187-249.
9. Bairam E. “Elasticity of Substitution, Technical Progress and Returns to Scale in Branches of Soviet Industry: A New CES Production Function Approach”, Journal of Applied Econometrics, Vol.6, № 1, 1991
10. Bairam E. “Production and Cost Functions. Specification, Measurement and Applications”, Ashgate, Aldershot, 1998
11. Baldwin, John R., “The Dynamics of Industrial Competition: “ A North American Perspective NY: Cambridge U Press, 1995.
12. Balk, Bert M., “Industrial Price, Quantity, and Productivity Indices: The Micro-Economic Theory and an Application”, Boston, Dordrecht, London: Kluwer Academic.

13. Bartelsman, Eric J., and Phoebus J. Dhrymes. “Productivity Dynamics: U.S. Manufacturing Plants, 1972-86,” Board of Governors of the Federal Reserve Board, Finance and Economics Discussion Series, No. 94-1, 1994.
14. Berndt E. “The Practice of Econometrics”, Wesley Publishing Company, 1991
15. Bessonova E., Kozlov K., Ksenia K. “Trade Liberalization, Foreign Direct Investment, and Productivity of Russian Firms”, NES Working Paper № BSP/2003/036 E, Moscow, 2003
16. Blackorby C., Russel R. “Will the Real Elasticity of Substitution Please Stand Up? (A Comparison of the Allen/Uzawa and Morishima Elasticities”, The American Economic Review, Vol.79, № 4, 1989
17. Bronfenbrenner M., Douglas P. “Cross-Section Studies in the Cobb-Douglas Function”, The Journal of Political Economy, Vol.47, № 6, 1939
18. Brown D., Earle J., Telegdy A. “Does Privatization Raise Productivity? Evidence from Comprehensive Panel Data on Manufacturing Firms in Hungary, Romania, Russia, and Ukraine”, 2004
19. Caballero, Ricardo, and Mohamad Hammour. “On the Timing and Efficiency of Creative Destruction,” Quarterly Journal of Economics, 111(3), 1996, 805-852.
20. Campbell, Jeffrey R. "Entry, Exit, Technology, and Business Cycles," NBER Working Paper No.5955, 1997.
21. Caves, D., L. Christensen, W. Diewert, “Output, input and productivity using superlative index numbers”, Economic Journal, 92, 1982, 73-96.
22. Charles R.Hulten, “Total Factor Productivity: A Short Biography”, NBER Working Paper 7471.
23. Clemhout S. “The Class of Homothetic Isoquant Production Functions”, The Review of Economic Studies, Vol.35, № 1, 1968
24. Cobb C., Douglas P. “A Theory of Production”, The American Economic Review, Vol.18, № 1, 1928
25. Cooper, Russell, John Haltiwanger and Laura Power. "Machine Replacement and the Business Cycle: Lumps and Bumps," NBER Working Paper No. 5260, revised 1997.

26. Corbo V., Meller P. "The Translog Production Function. Some Evidence from Establishment Data", Journal of Econometrics, № 10, 1979
27. Dacy D. "A Price and Productivity Index for a Nonhomogeneous Product", Journal of American Statistical Association, Vol.59, № 306, 1964
28. Desai P. "The Production Function and Technical Change in Postwar Soviet Industry: A Reexamination", The American Economic Review, Vol.66, № 3, 1976
29. Dhrymes P. "Some Extensions and Tests for the CES Class Production Functions", The Review of Economics and Statistics, Vol.47, № 4, 1965
30. Diewert W. "An Application of the Sheppard Duality Theorem: A Generalized Leontief Production Function", The Journal of Political Economy, Vol.79, № 3, 1971
31. Domar, Evsey D., "On the Measurement of Technical Change", Economic Journal, Vol. 71, №284. (Dec., 1961), pp. 709-729.
32. Douglas P. "The Cobb-Douglas Production Function Once Again: Its History, Its Testing, and Some New Empirical Values", The Journal of Political Economy, Vol.84, № 5, 1976
33. Dwyer, Douglas. "Productivity Races I: Are Some Productivity Measures Better Than Others?" Center for Economic Studies Working Paper, CES 97-2, 1997.
34. Dwyer, Douglas. "Technology Locks, Creative Destruction, and Non-Convergence in Productivity Levels" Center for Economic Studies Working Paper, CES 95-6, 1995.
35. Eric J.Bartelsman, Mark Doms, "Understanding Productivity: Lessons from Longitudinal Microdata", Journal of Economic Literature, Vol.38, №3 (Sep., 2000), 569-594.
36. Feldstein M. "Alternative Methods of Estimating A CES Production Function for Britain", Economica, Vol.34, № 136, 1967
37. Ferguson C. "Cross-Section Production Functions and the Elasticity of Substitution in American Manufacturing Industries", The Review of Economics and Statistics, Vol.45, № 3, 1963
38. Fisher, I.,"The Making of Index Numbers", Boston: Houghton-Mifflin, 1927.

39. Fisher F. “Aggregate Production Function and the Explanation of Wages: A simulation Experiment”, Review of Economics and Statistics, Vol. 53, № 4, 1971
40. Good D.H., Nadiri M.I., Sickles R.C., “Index Number and Factor Demand Approaches yo the Estimation of Productivity”, Handbook of Applied Econometrics, Vol.II.
41. Griliches, Zvi, “Productivity, R&D, and the Data Constraint”, American Economic Review, Vol. 84, №1 (Mar., 1994), pp. 1-23.
42. Griliches, Zvi, and Haim Regev. “Productivity and Firm Turnover in Israeli Industry: 1979-1988,” Journal of Econometrics, 65, 1995, 175-203
43. Griliches Z. “Practicing Econometrics. Essays in Method and Application”, Edward Elgar, Cheltenham, UK, 1998
44. Griliches Z., Mairesse J. “Production Functions: the Search for Identification”, NBER Working Paper № 5067, 1995
45. Haltiwanger, John. “Measuring and Analyzing Aggregate Fluctuations: The Importance of Building from Microeconomic Evidence, “ Federal Reserve Bank of St. Louis Economic Review, January/February, 1997.
46. Heathfield D., Wibe S. “An Introduction to Cost and Production Functions”, Macmillan Education, 1987
47. Hoch I. “Simultaneous Bias in the Context of the Cobb-Douglas Production Function”, Econometrica, Vol.26, № 4, 1958
48. Hoch I. “Estimation of Production Function Parameters Combining Time Series and Cross-Section Data”, Econometrica Vol.30, № 1, 1962
49. Hopenhyn, Hugo, and Richard Rogerson. “Job Turnover and Policy Evaluation: A General Equilibrium Approach,” Journal of Political Economy, 101(5), 1993, 915-38.
50. Hopenhyn, Hugo. “Entry, Exit, and Firm Dynamics in Long Run Equilibrium,” Econometrica, 60(5), 1992, 1127-50.
51. Intriligator, Bodkin, Hsiao “Econometric Models, Technique and Applications”, 1996
52. Jorgenson D. “The Embodiment Hypothesis”, The Journal of Political Economy, Vol.74, № 1, 1966

53. Jorgenson, D. *Productivity. Volume 1. Postwar U.S. economic growth.* Cambridge and London: MIT Press, 1995.
54. Jorgenson, D., Griliches Z., “The Explanation of Productivity Change”, *The Review of Economic Studies*, Vol. 34, №3 (July, 1967), pp. 249-284.
55. Kam Leong Szeto “An Econometric Analysis of a Production Function for New Zealand”, Treasury Working Paper 31, 2001
56. Kazi U. “The Variable Elasticity of Substitution Production Function: A Case Study for Indian Manufacturing Industries”, Oxford Economic Papers, Vol.32, № 1, 1980
57. Kemfert C. “Estimated substitution elasticities of a nested CES production function approach for Germany”, Energy Economics, № 20, 1998
58. Kennedy C., Thirlwall A. “Surveys in Applied Economics: Technical Progress”, Economic Journal, Vol. 82, № 325, 1972
59. Kmenta J. “On Estimation of the CES Production Function”, International Economic Review, Vol.8, № 2, 1967
60. Leser C. “Production Functions and British Coal Mining”, Econometrica, Vol.25, № 4, 1955
61. Levinsohn J., Petrin A. “Estimating Production Functions Using Inputs to Control for Unobservables”, NBER Working Paper № 7819, 2000
62. Lucia Foster, John Haltiwanger, C.J. Krizan, “Aggregate Productivity growth: Lessons from Microeconomic Evidence”, Center for Economic Studies 98-12, September 1998
63. Mansfield, Edwin, Mark Schwartz and Samuel Wagner. “Imitation Costs and Patents,” Economic Journal, 91, 1981, 907-918.
64. Marschak J., Andrews W. “Random Simultaneous Equations and the theory of Production”, Econometrica, Vol.12, № 3/4, 1944
65. McCarthy M. “Approximation of the CES Production Function: A Comment”, International Economic Review, Vol.8, № 2, 1967
66. McElroy F. “Returns to Scale, Euler’s Theorem, and the Form of the Production Functions”, Econometrica, Vol.37, № 2, 1969

67. McFadden D. “Constant Elasticity of Substitution Production Functions”, The Review of Economic Studies, Vol.30, № 2, 1963
68. Mizon G. “Inferential Procedures in Nonlinear Models: An Application in a UK Industrial Cross Section Study of Factor Substitution and Returns to Scale”, Econometrica, Vol.45, № 5, 1977
69. Mukerji V. “A Generalized S.M.A.C. Functions with Constant Ratios of Elasticity of Substitution”, The Review of Economic Studies, Vol.30, № 3, 1963
70. Mundlak Y., Hoch I. “Consequences of Alternative Specifications in Estimation of Cobb-Douglas Production Functions”, Econometrica Vol.33, № 4, 1965
71. Mundlak Y. “Production Function Estimation: Reviving the Primal”, Econometrica Vol.64, № 2, 1996
72. Murti V., Sastry V. “Production Functions for Indian Industry”, Econometrica, Vol.25, № 2, 1957
73. Nadiri M.I., “Some Approaches to the Theory and Measurement of Total Factor Productivity”, Journal of Economic Literature, Vol.8, №4 (Dec., 1970), 1137-1177.
74. Nadiri M.I., Prucha I., “A Comparison of Alternative Methods for The Estimation of Dynamic Factor Demand Models Under Nonstatic Expectations”, Journal of Econometrics, Vol. 33, 1986, pp. 187-211.
75. Nadiri M.I., Schankerman M., “Technical Change, Returns to Scale, and Productivity Slowdown”, American Economic Review, Vol. 71, 1981, pp. 314-319.
76. Nadiri I. “Producers theory” in Handbook of Mathematical Economics, volume 3, ed. by Arrow K., Intriligator M., Elsevier, 1998
77. Nasbeth, Lars, and George Ray (eds.), The Diffusion of New Industrial Processes: An International Study, 1974, Cambridge: Cambridge University Press
78. Nelson, Richard R., “Aggregate Production Functions and Medium-Range Growth Projections”, *The American Economic Review*, Vol. 54, №5 (Sep., 1964), pp. 575-606
79. Nerlove M. “Estimation and Identification of Cobb-Douglas Production Functions”, Chicago/Amsterdam: Rand McNally/North Holland, 1965
80. Olley S., Pakes A. “The Dynamics of Productivity in the Telecommunications Equipment Industry”, NBER Working Paper № 3977, 1992

81. Revankar N. “A Class of Variable Elasticity of Substitution Production Functions”, Econometrica Vol.39, № 1, 1971
82. Rotemberg, Julio J. and Woodford, Michael, “Imperfect Competition and the Effects of Energy Price Increases on Economic Activity.” Journal of Money, Credit and Banking,November, 1996.
83. Sargent T. “Macroeconomic Theory”, 1987
84. Sato R. “Homothetic and Non-Homothetic CES Production Functions”, The American Economic Review, Vol.67, № 4, 1977
85. Solow R. “Technical Change and the Aggregate Production Function”, The Review of Economics and Statistics, Vol.39, № 3, 1957
86. Susanto Basu and John G. Fernald, “Aggregate Productivity and Aggregate Technology”, International Finance Discussion Papers, Number 593, October 1997.
87. Uzawa H. “Production Functions with Constant Elasticity of Substitution”, The Review of Economic Studies, Vol.29, № 4, 1962
88. Verhulst M. “The Pure Theory of Production Applied to the French Gas Industry”, Econometrica, Vol.16, № 4, 1948
89. Walters A. “Production and Cost Functions: An Econometric Survey”, Econometrica Vol.31, № 1/2, 1963
90. Weitzman M. “Soviet Postwar Economic Growth and Capital-Labor Substitution”, The American Economic Review, Vol.60, № 4, 1970
91. Zarembka P. “On the Empirical Relevance of the CES Production Function”, The Review of Economics and Statistics, Vol.52, № 1, 1970
92. Zellner A., Revankar N. “Generalized Production Functions”, The Review of Economic Studies, Vol.36, № 2, 1969
93. Zellner A., Kmenta J., Dreze J. “Specification and Estimation of the Cobb-Douglas Production Function Models”, Econometrica Vol.34, № 4, 1966
94. Zellner A., Ryu H. “Alternative Functional Forms for Production, Cost and Return to Scale Functions”, Journal of Applied Econometrics, №13, 101-127, 1998
95. Ален Р. «Математическая экономия», 1963
96. Баранов Э.Ф. Об измерении индексов-дефляторов по отраслям экономики и промышленности. Экономический журнал ВШЭ №2, 2002г., стр. 217-224

97. Бессонов В.А. “Проблемы построения производственных функций в российской переходной экономике”, ИЭПП, Москва, 2002
98. Клейнер Г.Б. “Производственные функции. Теория, методы, применение”, “Финансы и статистика”, Москва, 1986
99. Яременко Ю.В., Ершов Э.Б., Смышляев А.С. «Опыт построения производственной функции для народного хозяйства ССС за 1950-1970гг.», Исследования по математической экономии и смежным вопросам, МГУ, Москва, 1973.

Препринт WP…/2013/…
Серия WP…
[Название серии]

Казакова Мария Владимировна

Анализ свойств производственных функций, используемых при декомпозиции экономического роста